昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2013年7月1日発行　第51巻7号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

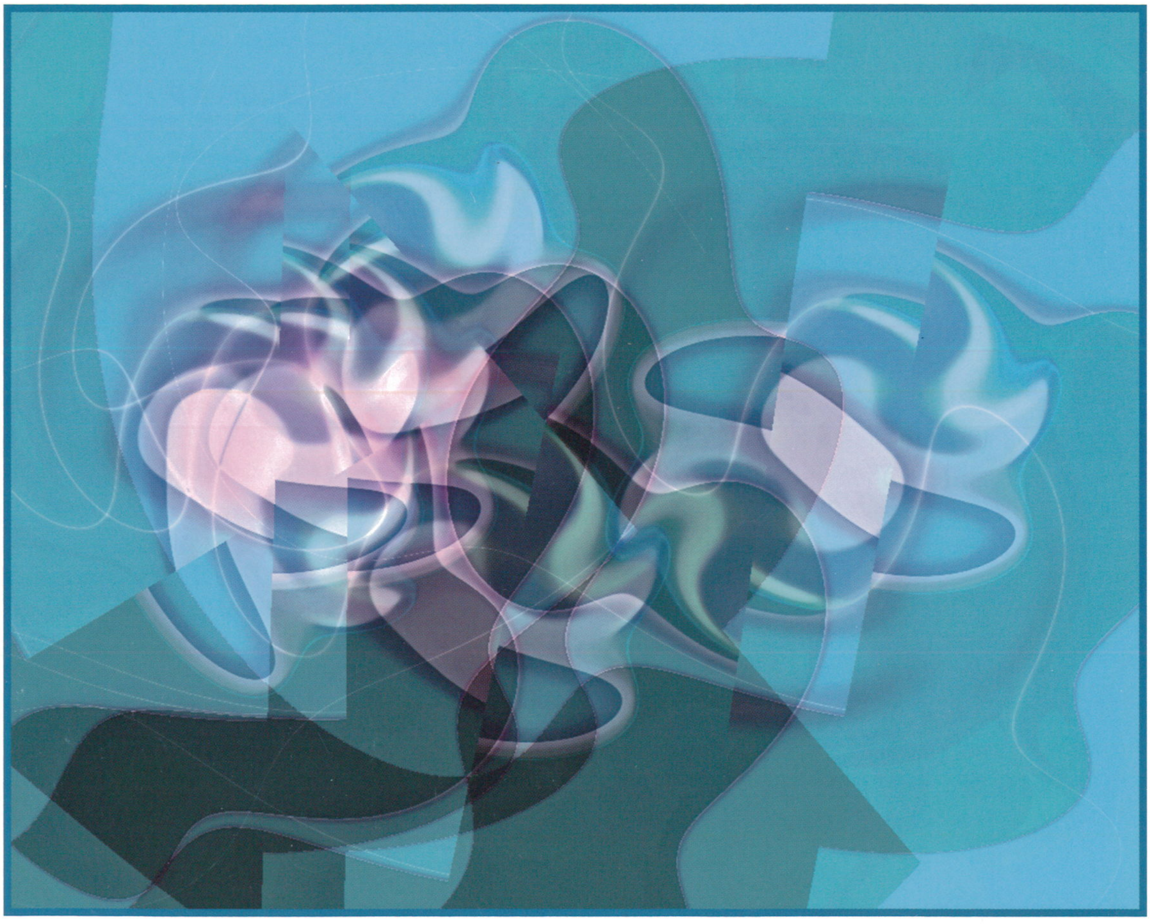
数理科学

7
2013

特集

群と物理学

代数構造を用いて物理を知るために



No.601

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 601 July 2013

群と物理学

代数構造を用いて物理を知るために

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間(本誌のみ) 11,000円，半年間(本誌のみ) 5,500円． (税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7〜2010年/5 省略
2010年/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説
2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理
2013年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学

数理科学臨時別冊一覧

12年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
12年/4 弦理論の代数的基礎
12年/5 アインシュタイン方程式
12年/6 CP対称性の破れ
12年/7 弦の場の理論
12年/9 超弦理論の応用
12年/10 複素多様体論講義
12年/11 幾何学の量子化
12年/12 量子力学から超対称性へ
13年/1 行列解析ノート
13年/4 無限量子系の物理と数理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店
MARUZEN & ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学 (北1店)
九州大学 (理系)

July 2013 MATHEMATICAL SCIENCES Number 601

特集／群と物理学

物理における群の重要性

川村 嘉春

今回の特集は「群と物理学」である．ここで，「群」とは次の性質を満たす「もの」の集合のことである（群が抽象的な概念であることを理解してもらうためにあえて記載した）．

(1) 集合 G の任意の元（要素）g, h に対して，G の元を一意的に定める規則（G の積あるいは合成と呼び，gh と書く）が与えられている．

(2) G の積に関して，結合則 $(gh)k = g(hk)$ が成り立つ．

(3) 任意の元 g に対して，$ge = eg = g$ を満たす元 e が1つ存在し，単位元と呼ばれる．

(4) 任意の元 g に対して，$gg^{-1} = g^{-1}g = e$ を満たす元 g^{-1} が1つ存在し，g の逆元と呼ばれる．

「群」の持つ代数的構造，群および群の表現の分類などを論ずる数学の分野が「群論」で，物理学において重宝な道具として広く用いられる．その理由は主に群の抽象性に起因する（群論において「もの」が特定されていないことに注目してほしい）．**抽象的な概念は一般性や普遍性を有するため，応用範囲が広く，物理法則とその背後にある概念・原理を理解する上で切り札のような働きを果たす．**群論の場合，その代数構造が物理を知る上で魔法の杖のような威力を持っている．

もう少し踏み込もう．物理法則を解明するために，物理系（簡単のため系と呼ぶこともある）の性質を知る必要がある．その常套手段は，系に対して「働きかけ」をして系の変化の様子を調べることである．これ以降，「働きかけ」を「変換」と呼ぶことにする．「変換」が群を成す場合，群論の手法を活用することができる．つまり，**物理学において，「群」を成す「もの」は多くの場合，「変換」を指し，変換を受ける「対象」は物理系である．**さらに，物理系は様々な構成要素（時空，物質，状態，物理量など）から成る．このように「もの」（「変換」）および「それに付随するもの」（「物理系」）を特定することにより，「群」が身近なものになる．

「変換」に対して，系が変化を受けない場合に注目しよう．この場合，系は「対称性」（あるいは「不変性」）を有すると言う．一般に，**群を成す一連の変換の下で系が不変に保たれる場合，一定に保たれる物理量（「保存量」と呼ばれる）が存在し，それらが群（の表現）の元になり，さらに変換を生成する役割を果たす**ことが知られている．

変換を受ける「対象」に応じて物理系の構成要素を分類してみよう．分類の仕方は一意的ではなく，本特集の内容に絡めたものを選ぶことにする．各解説の内容紹介を含めて，構成要素のプロフィールを簡単に記載する．

(a) 量子力学において，対象は「系の状態」や「物理量である演算子」で「ユニタリー群」(ユニタリー行列で表現される群）の下での変換性や代数構造を用いて，固有値やスペクトラムを知ることができる．棚橋誠治さんは量子力学において「変換」と「対称性」と「保存量」がどのように関連しているのか，さらに「群の表現」とどのように関係するのかについて，角運動量演算子を用いて解説されている．

(b) 弦理論において，対象は素粒子を統一的に記述すると期待されている「弦」およびそれに付随する「世界面」,「時空」,「ブレイン」などである．溝口俊弥さんは弦理論の美しさ（奇跡のように見える特徴）を紹介するために，ゲージ対称性と関係する E_8 群や ADE 分類について解説されている．

(c) 相対性理論において，対象は「時空」で，時空構造とその中での物体や場の運動形態はミンコフスキー時空ならば,「ポアンカレ群」(世界間隔を不変に保つ変換が成す群）により規定され，リーマン時空ならば,「一般座標変換群」により規定される．小玉英雄さんは計量を不変に保つ変換（等長変換）を有する時空において，等長変換群と無限遠の境界での共形変換群との対応関係について解説されている．

(d) 物理系を記述する微分方程式の中には，厳密に解けるものがある．そのような系は「可積分系」と呼ばれ，対称性の存在が深く関わっている．対称性に付随する保存量が「群」あるいは，群概念のある種の拡張である「量子群」のような代数構造を有している場合が多い．長谷川浩司さんは可積分系としてパンルヴェ方程式で記述できる系を用いて,「量子群」との関係について解説されている．

(e) 「物質」を対象とする場合，物質の結晶構造は「並進群」,「点群」(図形を不変に保つような 1 点のまわりの変換が成す群),「空間群」(結晶の原子配列を不変に保つ変換が成す群）を用いて記述することができる．播磨尚朝さんはそれらに加えて，2 次相転移における結晶の対称性の変化について解説されている．

(f) ミクロ（高エネルギー）の世界とマクロ（低エネルギー）の世界をつなぐ道具として,「くりこみ群」は強力である．対象は「ハミルトニアン」や「分配関数」などの物理量で，変換は変数である距離，エネルギーのスケールを変えることである．正確に言えば,「くりこみ群」は逆元を持たないため,「半群」(性質 (1)，(2)，(3) を有する「もの」の集合）である．寺尾治彦さんはくりこみ群の考え方や有用性を紹介するために，摂動的くりこみ群，Wilson 流のくりこみ群，力学的くりこみ群（くりこみ群の手法を時間発展に応用したもの）について解説されている．

(g) 物理学において，余剰次元を有する時空や抽象的なベクトル空間を含む一般化された空間を対象とする場合がある．そこでは，実際に認知される空間の背後に次元や対称性が潜んでいることがある．宮本雅彦さんは「有限群」を用いて次元を縮小する方法および場の理論の構成法の 1 つである頂点代数について解説されている．

(h) 素粒子物理学において，主な対象は「素粒子」や内部量子数に関係する「内部空間」で，素粒子の分類，相互作用の決定などに「リー群」が有効であることが知られている．小林達夫さんはクォークやレプトン（物質を構成する素粒子でそれぞれ 6 種類見つかっている）の質量や世代間の混合に関する構造（フレーバー構造）を理解するために，非可換離散群を用いた試みについて解説されている．

このように，群および群概念の拡張は物理学の様々な分野で大活躍をしている．さらに今後も強力な解析手段として物理法則の解明に役立つ可能性を秘めており，その動向から目が離せない．

(かわむら・よしはる，信州大学理学部)

群と量子力学

棚橋　誠治

1. はじめに

量子力学をひととおり理解する上で，あらかじめ「**群**」の数学的構造を理解しておく必要はない．しかし量子力学は，「**変換**」や「**対称性**」といった概念を通じて，「群」とその「**表現**」についての具体例を我々に与えてくれる．この事情は量子力学の教科書[1~3]や物理学における群論を論じた教科書[4,5]で詳しく説明されている．とくに3次元回転対称性に基づいて，角運動量の量子化が説明できるくだりは，量子力学を勉強する上でハイライトの一つになっている．群とその表現の考え方はまた，量子力学を駆使して具体的な問題を考察する上で役立つことが多い．量子力学では「**対称性**」と「**保存量**」が密接に関係しており，このことに起因する「選択則」によって，許される物理過程を制限することができるからである．

さらに進んで，量子力学を拡張した「場の量子論」や，その成果に基づいている「素粒子の標準模型」を学ぶ上で，群とその表現の考え方の初歩を理解しておけば，とても役に立つ．「大統一模型」など，素粒子の標準模型を超えた模型を研究するためには，群とその表現の知識はもはや必須と言ってもよい[6]．

この記事では，量子力学の中で「変換」や「対称性」の概念がどのように現れ，「群」とその「表現」にどのように関係しているかを，角運動量と回転変換を例にとって解説したい．

2. 量子力学と正準変換，対称性と保存量

「対称性」と「保存則」の関係を見て取るのには，ハイゼンベルグ表示で量子力学を記述しておくと便利である．そこで，まず最初にハイゼンベルグ表示の量子力学の枠組みとそのときに重要になる正準変換の考え方を駆け足でおさらいしておこう．

質点の運動を記述する量子力学では，質点の位置を表す座標演算子 $\hat{q}_r$ とそれと正準共軛な運動量演算子 $\hat{p}_r$ が導入される．ここで，添字 r は1から n までの整数値をとる．n は自由度の数である．座標演算子 $\hat{q}_r$ と運動量演算子 $\hat{p}_r$ をまとめて正準変数と呼び，正準変数は次の交換関係を満たす．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i\hbar}[\hat{q}_r, \hat{p}_s] = \delta_{rs}, \\ &\frac{1}{i\hbar}[\hat{q}_r, \hat{q}_s] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_r, \hat{p}_s] = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

正準変数 $\hat{q}_r, \hat{p}_r$ のみで書かれ時間 t をあらわに含まない物理量の演算子 $\hat{\mathcal{O}}$ の時間発展は，ハミルトニアン $\hat{H}$ を用いてハイゼンベルグ方程式

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathcal{O}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}] \tag{2}$$

で与えられる．ハイゼンベルグ方程式 (2) の解は，形式的に

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{O}}(t) = \hat{U}\hat{\mathcal{O}}(t_0)\hat{U}^\dagger, \\ &\hat{U} = \exp\left(-\frac{\hat{H}}{i\hbar}(t - t_0)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

として書き表すことができる．この表示では，期待値

$$\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}|\psi\rangle \tag{4}$$

の時間発展は，演算子 $\hat{\mathcal{O}}$ の時間発展 (3) が担っている（ちなみにシュレディンガー表示では，演算子の代わりに状態 $|\psi\rangle$ の時間発展が期待値 (4) の時間発展を担っている）．

ハイゼンベルグ表示の量子力学では，交換関係 (1) を満たす限りは，正準変数をどのようにとってもよい．そこで，あらたな演算子 $\hat{q}'_r = q'_r(\hat{q},\hat{p})$, $\hat{p}'_r = p'_r(\hat{q},\hat{p})$ を定義しよう．ここで，q'_r, p'_r は，$\hat{q} = \hat{q}_1, \hat{q}_2, \cdots$, $\hat{p} = \hat{p}_1, \hat{p}_2, \cdots$ を引数とする関数で，交換関係 (1) と同じ形の交換関係

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i\hbar}[\hat{q}'_r, \hat{p}'_s] = \delta_{rs}, \\ &\frac{1}{i\hbar}[\hat{q}'_r, \hat{q}'_s] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}'_r, \hat{p}'_s] = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

を満たすように選ばれているものとする．このような変数の取り替え $(\hat{q}_r, \hat{p}_r) \to (\hat{q}'_r, \hat{p}'_r)$ のことを正準変換と呼ぶ．

以下では，無限小変換 $\hat{q}_r \to \hat{q}'_r = \hat{q}_r + \epsilon\delta\hat{q}_r$, $\hat{p}_r \to \hat{p}'_r = \hat{p}_r + \epsilon\delta\hat{p}_r$ の場合を議論しよう．ϵ は無限小の大きさのパラメータであり，$\delta\hat{q}_r$, $\delta\hat{p}_r$ は，関数 δq_r, δp_r を用いて

$$\delta\hat{q}_r = \delta q_r(\hat{q},\hat{p}), \quad \delta\hat{p}_r = \delta p_r(\hat{q},\hat{p}) \tag{6}$$

と表されるものとする．この変換が正準変換であるためには，関数 δq_r, δp_r は，条件

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i\hbar}[\hat{q}_r, \delta\hat{p}_s] + \frac{1}{i\hbar}[\delta\hat{q}_r, \hat{p}_s] = 0, \\ &\frac{1}{i\hbar}[\hat{q}_r, \delta\hat{q}_s] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_r, \delta\hat{p}_s] = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

を満たす必要があるが，そのような条件を満たす δq_r, δp_r は，変換の生成子 $\hat{F}$ を用いて

$$\delta\hat{q}_r = \frac{1}{i\hbar}[\hat{q}_r, \hat{F}], \quad \delta\hat{p}_r = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_r, \hat{F}] \tag{8}$$

と書き下すことができる（式 (8) を式 (7) に代入して具体的にチェックするとよい）．以降では簡単のため，生成子 $\hat{F}$ は，正準変数のみの関数で，時間にはあらわに依存していない場合に限ることにする．

物理量 $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(\hat{q},\hat{p})$ の正準変換の前後での変化を $\hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}} + \epsilon\delta\hat{\mathcal{O}}$ とすると，

$$\delta\hat{\mathcal{O}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathcal{O}}, \hat{F}] \tag{9}$$

となる．正準変換のパラメータが無限小の ϵ の場合だけでなく，有限の大きさ θ を持つ場合についても，ハイゼンベルグ方程式 (2) からその形式解 (3) を導いたときと同様の手法で計算することができる．その結果は，

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}_\theta = \hat{V}\hat{\mathcal{O}}\hat{V}^\dagger, \\ &\hat{V} = \exp\left(-\frac{\hat{F}}{i\hbar}\theta\right) \end{aligned} \tag{10}$$

である．シュレディンガー表示のとき同様に，演算子の代わりに状態を変換する立場をとると，状態の変換は

$$|\psi\rangle \to |\psi\rangle_\theta = \exp\left(\frac{\hat{F}}{i\hbar}\theta\right)|\psi\rangle \tag{11}$$

と記述できる．

ここまででおおよその準備ができたので，次に「対称性」について説明しよう．あるハミルトニアンが無限小正準変換の下で対称であるのは

$$\delta\hat{H} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{F}] = 0 \tag{12}$$

を満たす場合のことである．この場合，正準変換の前後でハイゼンベルグ方程式の形は同一である．式 (12) は大変興味深い式である．この式を少し変形すると

$$\delta\hat{H} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{F}] = -\frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] = -\frac{d}{dt}\hat{F}$$

となり，無限小変換の下でハミルトニアンが対称性をもち $\delta\hat{H} = 0$ であれば，その変換の生成子 $\hat{F}$ は，自動的に保存量 $\frac{d}{dt}\hat{F} = 0$ となることを簡単に示すことができる．逆に，保存量 $\hat{F}$ が存在すれば，ハミルトニアンはその $\hat{F}$ を生成子とする無限小正準変換の下で対称性をもつことがわかる．つまり，演算子の交換関係を通じて，対称性と保存則が相互に密接に関連しているのである．

3. 回転変換と角運動量

ここからは，もっと具体的な問題，中心力の下での点粒子の運動の量子力学を使ってこれまでに述べた議論を確かめよう．このときのデカルト座標での正準変数は

$$\hat{\vec{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), \quad \hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z) \tag{13}$$

であり，ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^2 + V(\hat{\vec{r}}^2) \tag{14}$$

と書ける．ここでの m は点粒子の質量である．よく知られているように，この場合の軌道角運動量演算子 $\hat{\vec{L}} \equiv \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ は

$$0 = \frac{d}{dt}\hat{\vec{L}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\vec{L}}, \hat{H}] \tag{15}$$

を満たす保存量演算子であり，角運動量を生成子とする無限小正準変換はハミルトニアンの対称性となっているはずである．

では，角運動量演算子を生成子とする無限小正準変換はどのような変換なのだろうか．例えば，$\hat{L}_z$ を生成子とする正準変換を具体的に求めてみよう．これは，式 (8) を用いると容易に計算できて

$$\begin{aligned} &\hat{x} \to \hat{x} - \epsilon\hat{y}, \quad \hat{y} \to \hat{y} + \epsilon\hat{x}, \\ &\hat{p}_x \to \hat{p}_x - \epsilon\hat{p}_y, \quad \hat{p}_y \to \hat{p}_y + \epsilon\hat{p}_x, \end{aligned} \tag{16}$$

であることがわかる（$\hat{z}$ と $\hat{p}_z$ は変化しない）．さらに，有限の大きさのパラメータ θ での変換を計算すると

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \tag{17}$$

となって，z 軸まわりの角度 θ の回転変換に対応する変換に他ならない．

つまり，z 方向の角運動量演算子 $\hat{L}_z$ は，z 軸まわりの回転を生成するのである．同様に，x 方向の角運動量演算子 $\hat{L}_x$ は x 軸まわりの無限小回転を，y 方向の角運動量演算子 $\hat{L}_y$ は y 軸まわりの無限小回転を，それぞれ，生成する．つまり，角運動量が保存するということは，これらの 3 次元回転変換（群の言葉では $SO(3)$ 群と呼ばれる）の下でハミルトニアンが対称性をもつことを示しているのである．

では，3 次元回転変換（$SO(3)$ 群）の性質は，どのように量子力学に影響しているのだろうか．特に，3 次元回転変換では，x 軸まわりに角度 θ_x だけ回転させてから y 軸まわりに角度 θ_y だけ回転させる変換と，y 軸まわりに角度 θ_y だけ回転させてから x 軸まわりに角度 θ_x だけ回転させる変換は，一般には異なる変換である．この性質（$SO(3)$ 群の非可換性）は，量子力学にどのように影響しているのだろうか．このことを調べるために，変換の順番を入れ替えて，具体的に

$$[[\hat{\mathcal{O}}, \hat{L}_x], \hat{L}_y] - [[\hat{\mathcal{O}}, \hat{L}_y], \hat{L}_x] \tag{18}$$

を計算してみよう．ヤコビ恒等式

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{C}] + [[\hat{B}, \hat{C}], \hat{A}] + [[\hat{C}, \hat{A}], \hat{B}] = 0$$

を用いると，3 次元回転変換の非可換性を表す式 (18) は

$$[\hat{\mathcal{O}}, [\hat{L}_x, \hat{L}_y]] \tag{19}$$

と書き直すことができる．つまり，

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] \neq 0 \tag{20}$$

であることが，x 軸まわりの回転と y 軸まわりの回転が非可換であることに直接結びついているのである．

この意味で，角運動量の交換関係

$$\begin{aligned} &[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \\ &[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \end{aligned} \tag{21}$$

は $SO(3)$ 群の構造と深く関係している．

この交換関係を用いれば，（軌道）角運動量量子数 l や磁気量子数 m の量子化を議論することができるが，その具体的な手続きについては，量子力学の標準的な教科書を参照してほしい．

4. $SO(3)$ 群の表現

前節では，角運動量演算子が 3 次元回転変換（$SO(3)$ 群）の生成子であること，角運動量演算子の交換関係 (21) が $SO(3)$ 群の構造を表していることを説明した．ここで，角運動量はあくまでも演算子であり，計算する上で少し扱いづらい．交換関係 (21) を，具体的な「行列」の積の交換関係として「表現」できれば便利である．考えている変換（この場合は $SO(3)$ 群）に，どのような表現（行列）があり得るのかを系統的に調べる数学の学問分野は，群の「表現論」と呼ばれる．ここでは，量子力学において，$SO(3)$ 群の表現がどのように自然に現れるのかを解説しよう．

この節以降では，$\hbar = 1$ の単位系をとって数式をなるべく簡潔に書き下すようにしたい．

まず，磁気量子数 m のみ異なる $2l+1$ 個の状態の一組

$$|m\rangle, \quad m = l, l-1, \cdots, -l+1, -l \qquad (22)$$

を用意する．ここで，角運動量量子数 l をはじめ，磁気量子数 m 以外のすべての量子数は各状態で共通である．

この状態の回転変換（式 (11) で生成子 $\hat{F}$ を角運動量演算子 $\hat{L}_i$ としたもの）を考えよう．状態 $|m\rangle$ は $\hat{L}_z$ の固有状態であること，また，(22) に含まれる各状態は，$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ で定義される「昇降演算子」によって互いに移り変わることから，回転変換によって (22) の状態が閉じていること，つまり，回転変換後の状態が，(22) の各状態の線形結合になっていること

$$\hat{L}_i|m\rangle = \sum_{m'} |m'\rangle [\rho_l(\hat{L}_i)]_{m',m} \qquad (23)$$

がただちに分かる．ここで，線形結合の係数を $[\rho_l(\hat{L}_i)]_{m',m}$ と表記した．この係数は，$(2l+1) \times (2l+1)$ 行列 $\rho_l(\hat{L}_i)$ の m' 行・m 列成分であると考えると後々便利である．

次に，式 (23) の表記法を用いて，演算子 $\hat{L}_i\hat{L}_j$ が状態 $|m\rangle$ に作用したらどうなるかを考えよう．これも簡単に計算できて

$$\begin{aligned}\hat{L}_i\hat{L}_j|m\rangle &= \sum_{m'} \hat{L}_i|m'\rangle[\rho_l(\hat{L}_j)]_{m',m} \\ &= \sum_{m',m''} |m''\rangle[\rho_l(\hat{L}_i)]_{m'',m'}[\rho_l(\hat{L}_j)]_{m',m} \\ &= \sum_{m''} |m''\rangle[\rho_l(\hat{L}_i)\rho_l(\hat{L}_j)]_{m'',m} \qquad (24)\end{aligned}$$

となることがわかる．ここで，$[\rho_l(\hat{L}_i)\rho_l(\hat{L}_j)]_{m'',m}$ は，行列の積 $\rho_l(\hat{L}_i)\rho_l(\hat{L}_j)$ の m'' 行・m 列成分である．同様に，

$$\hat{L}_j\hat{L}_i|m\rangle = \sum_{m''} |m''\rangle[\rho_l(\hat{L}_j)\rho_l(\hat{L}_i)]_{m'',m} \qquad (25)$$

であることもすぐにわかり，結局，

$$\rho_l\left(\frac{1}{i}[\hat{L}_i, \hat{L}_j]\right) = \frac{1}{i}[\rho_l(\hat{L}_i), \rho_l(\hat{L}_j)] \qquad (26)$$

が成り立つことが示される．

式 (26) において，左辺にあった演算子としての交換関係が，右辺では，行列としての交換関係に置き換わっていることに着目してほしい．このことは，$\rho_l(\hat{L}_i)$ が $SO(3)$ 群の表現であることを示している．このように，量子力学では，$SO(3)$ 群の表現が極めて自然に現れてくるのである．

いくつかの場合について，このように構成される表現を具体的に見ていこう．

まずは $l = 0$ の場合．この場合，可能な磁気量子数は $m = 0$ しかなく，

$$\hat{L}_x|0\rangle = \hat{L}_y|0\rangle = \hat{L}_z|0\rangle = 0 \qquad (27)$$

であることがわかる．$l = 0$ 表現は 1×1 行列となり，

$$\rho_{l=1}(\hat{L}_x) = \rho_{l=1}(\hat{L}_y) = \rho_{l=1}(\hat{L}_z) = 0 \qquad (28)$$

である．この表現は，関係式 (26) を自明に満たし，「自明な表現」と呼ばれる．

次に，角運動量量子数が $l = 1$ のときに，具体的に表現を書き下すと，3×3 行列（$3 = 2l + 1$）となっていて，

$$\rho_{l=1}(\hat{L}_x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{l=1}(\hat{L}_y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{l=1}(\hat{L}_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．この行列が関係式 (26) を満たすことを確認することは容易である．この行列は，3 次元回転群 $SO(3)$ の 3 次元表現と呼ばれる．

回転の角度が有限の大きさの場合は，

$$\exp\left(\frac{1}{i}\sum_i \theta_i \rho_l(\hat{L}_i)\right) \tag{29}$$

を計算すればよい．例えば，y 軸まわりの角度 θ の回転変換の場合に 3 次元表現を用いて式 (29) を具体的に計算すると

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \end{pmatrix}$$

となり，ちょうど一回転した場合（つまり角度 θ が 2π の場合）に，変換行列が単位行列となることも確かめられる．

同様にして，$l=2$ のときには，5×5 行列 $\rho_{l=2}$ を構成することができ，これは $SO(3)$ 群の 5 次元表現に他ならない．

5. スピンと射影表現

これまでに，$SO(3)$ 群の表現が，角運動量量子数 l ごとに，$2l+1$ 次元表現として構成されることを見てきた．軌道角運動量演算子 $\hat{\vec{L}}$ で作られる角運動量量子数 l は非負の整数値をとるので，これらの表現はすべて奇数次元表現である．

ここでいったん物理を離れ，純粋に数学として考えると，交換関係 (26) を満たすような偶数次元のエルミート行列を見つけることは容易である．実際に，パウリ行列と呼ばれる次の 2×2 のエル

ミート行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて，2×2 行列 $\rho(\hat{L}_i) = \frac{1}{2}\sigma_i$ を定義すると，$\rho(\hat{L}_i)$ が交換関係 (26) を満足することは容易にチェックできる．この表現は $SO(3)$ 群の 2 次元表現と呼ばれるが，これを角運動量の言葉で理解しようとすると，$l = \frac{1}{2}$ に対応する $(2 = 2l+1)$ ことになる．しかし，軌道角運動量ではこのような半整数の角運動量量子数を実現することはできない．この 2 次元表現の量子力学での意味は何なのだろうか．

実は，この表現は，スピン角運動量として量子力学に現れる．スピン角運動量の概念は，前期量子論の段階でいろいろな紆余曲折があった後に発見されたため，歴史的な発見の順序に従って量子力学を勉強すると分かり難く感じる概念であるが，このように $SO(3)$ 群の表現の立場で整理して考えると比較的納得しやすい．

スピン角運動量 $\hat{\vec{s}}$ は考えている粒子に固有の角運動量演算子である．以降では，軌道角運動量とスピン角運動量を合わせた全角運動量演算子を

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{s}} \tag{30}$$

と定義し，これまで述べてきた軌道角運動量演算子 $\hat{\vec{L}}$ と区別することにする．$\hat{\vec{J}}$ も回転変換の生成子であるので，軌道角運動量 $\hat{\vec{L}}$ での式 (21) と同様，$SO(3)$ 群の性質から，交換関係

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x,$$
$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y \tag{31}$$

を満たす（前節と同様，$\hbar = 1$ の単位系をとっている）．前節では軌道角運動量演算子 $\hat{L}_i$ と状態 (22) を用いたが，その代わりに，全角運動量演算子 $\hat{J}_i$ と $(2j+1)$ 個の状態の組

$$|m\rangle, \quad m = j, j-1, \cdots, -j+1, -j \tag{32}$$

を用いて $SO(3)$ 群の表現を構成すればよい．軌道角運動量の場合とは異なり，j は半整数を許すので，2 次元表現に対応する角運動量量子数 $j = \frac{1}{2}$ を考えることができる．このときの 2 次元表現は，具体的には，

$$\rho_{j=\frac{1}{2}}(\hat{J}_i) = \frac{1}{2}\sigma_i \tag{33}$$

と書ける．

次に有限の大きさの角度の回転変換

$$\exp\left(\frac{1}{i}\sum_i \theta_i \rho_j(\hat{J}_i)\right) \tag{34}$$

を考えよう．例えば，y 軸まわりの角度 θ の回転変換の場合に 2 次元表現 (33) を用いて式 (34) を具体的に計算すると

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{35}$$

が得られる．式 (35) を見ると，ちょうど一回転した場合（つまり角度 θ が 2π の場合）に，変換行列が -1 となり，単位行列にはならないことに注意してほしい．これは，$SO(3)$ 群において，2π 回転が単位元と一致している事実とは合致していない．このため，$SO(3)$ 群の 2 次元表現は「射影表現」であると呼ばれるが，量子力学の枠組みではそのような「射影表現」を許容している．例えば，回転変換後の状態を $|\psi\rangle_\theta$ と表記すると，演算子 $\hat{O}$ の期待値の θ 回転は

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle \to {}_\theta\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle_\theta \tag{36}$$

と書けるが，射影表現の場合，つまり

$$|\psi\rangle_{2\pi} = -|\psi\rangle \tag{37}$$

の場合であっても，期待値は 2π 回転後にもとの値に戻ることが分かるからである．

6. おわりに

この記事では，量子力学における群論（特に 3 次元回転群，$SO(3)$）について，「変換」，「対称性」，

「群の表現」というキーワードを用いて駆け足で解説した．ただ，紙面の制約もあり，十分な説明ができなかった箇所が相当にあることをおそれる．また，3次元調和振動子やクォーク模型等の素粒子分野に現れる $SU(3)$ 対称性やもっと大きな群，物性物理で重要な役割を果たす点群や空間群など，量子力学を駆使する様々な分野で威力を発揮する議論については全く紹介できなかった．これらについては，参考文献にあげた量子力学の教科書，あるいは，物理学における群論の教科書を読んで勉強してほしい．

参考文献

1) J.J. サクライ（桜井明人訳）『現代の量子力学（上），（下）』吉岡書店 (1989).
2) 猪木慶治，川合光『量子力学 1，2』講談社サイエンティフィック (1994).
3) A. メシア（小出昭一郎，田村二郎訳）『量子力学 1，2，3』東京図書 (1972).
4) 吉川圭二『群と表現』岩波書店 (1996).
5) 小野寺嘉孝『物性物理/物性化学のための群論入門』裳華房 (1996).
6) H. ジョージァイ（九後汰一郎訳）『物理学におけるリー代数』吉岡書店 (1990).

（たなばし・まさはる，名古屋大学素粒子宇宙起源研究機構／大学院理学研究科）

群と弦理論

溝口 俊弥

■ 1. はじめに ■

弦理論（string theory）を一言で言うと，「非常に短い「ひも」の振動によってこの世のすべての**素粒子**を記述しようとする理論」ということになります．現在までに見つかっている素粒子は，**標準模型**（standard model）によって非常によい精度で記述されています．しかし，様々な理由*1)から標準模型は拡張され，超対称標準模型や大統一理論が考案されました．そして，多くの研究者が，その背後に超対称性をもつ弦理論—**超弦**（superstring）**理論**—が究極理論として存在していると期待し，あるいはその存在を暗黙に仮定して研究してきました．

弦理論が自然界を支配している直接的な実験的証拠や観測的事実は—あえて挙げるとするなら「自然界には重力が存在し，弦理論はそれを量子化できる」という事実はありますが，それ以外—現在までのところ何一つありません．それでもなお，弦理論がこれほどまでに精力的に研究され，存在が信じられている一つの理由は，その奇跡的とも言える整合性と理論的内容の美しさにあります．本稿では，そのような弦理論の美しさの中でも群に関するもの，特にゲージ対称性や双対対称性に現れる最大の例外群，E_8 にまつわる不思議な数々の事実について紹介したいと思います．

*1) 例えば，「ダークマターがない」などのように実験・観測的に決定的なもの，「パラメータが多すぎる」，「構造が複雑すぎる」などのように審美的なもの，あるいは「巨大な数の引き算で非常に小さな答えが出るのは不自然」のようにそれが「問題」なのか最近やや微妙になっているものなどです．また，「重力を量子化できない」という場の理論では解決困難な問題もあります．

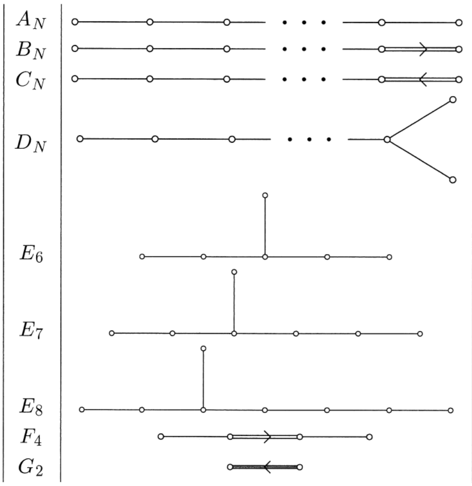
■ 2. 線形リー群とディンキン図形 ■

はじめに，E_8 とはどんな群なのか説明しましょう．E_8 は，単純な線形リー群の分類の中で，例外群と呼ばれるもののうちで最大のものです．ちょっと長くなりますのであらすじだけをはじめに言うと，「リー群」（すぐ説明します）の無限小変換形に相当する「リー代数」が表 1 のような図形で分類できて，その特別な場合が E_8 です．その図形から無限小変換形を構成できて，それを exp の肩に乗せたのが E_8 群になります．

リー群とは，大ざっぱに言って群自体が滑らかな多様体になっているもの，つまりその群の要素が連続的ないくつかのパラメータを持っていて，それらが局所的に座標と見なせるようになっているようなもののことです．そして，**線形リー群**とは，単に行列式が 0 でない行列の群 $GL(N,\mathbb{C})$（$= N$ 次一般線形群）の部分群のことを言います．行列式が 1 の N 次ユニタリ行列の群である $SU(N)$ や，行列式が 1 ですべての要素が実数の $N \times N$ 行列の群 $SL(N,\mathbb{R})$，あるいは実直交行列の群である $SO(N)$ などがその例です．「単純」というのは後ほど述べるようにその「リー代数」が「単純」なものとしておきます．

次に，G をある線形リー群として，ある行列 X と実数 t とで e^{tX} が G に入るようなものを考えましょう．行列の指数関数は無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(tX)^n$ で定義しますから，$e^{tX} = 1 + tX + \cdots$ です．したがって，量子力学とかでもやると思いますが，X は G の単位元 1 からの無限小変換に対応します．このような X をすべて集めてできた集合を $\mathfrak{g}$ とすると，$\mathfrak{g}$ は線形空間になり，$\mathfrak{g}$ の 2 つの元 a,b の交換関係 $[a,b] \equiv ab - ba$ はまた $\mathfrak{g}$ に属する，つまり交換関係に関して閉じるものになります．また，X,Y,Z を $\mathfrak{g}$ の元とするとき，

表 1　ディンキン図形.



ヤコビ則 $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ が成り立ちます．この $\mathfrak{g}$ を群 G の**リー環**，あるいは**リー代数**と呼びます．例えば，量子力学でスピンを習うと出てくる 3 つのパウリ行列 $\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ の $(2i)^{-1}$ 倍をそれぞれ T_a $(a=1,2,3)$ とすると，$[T_1,T_2]=T_3$ およびそれらをサイクリックに置換した関係式が成り立ちますから確かに閉じていますし，行列ですからもちろんヤコビ則も満たされます．T_a $(a=1,2,3)$ の張る実ベクトル空間は $SU(2)$ のリー代数であり，また複素ベクトル空間に拡張すれば $SL(2,\mathbb{C})$ のリー代数になります．さて，線形リー群のリー代数は，表 1 のようなディンキン図形と呼ばれる，小さな丸とそれらを結ぶ線からなるグラフによって分類されることが古くから知られています．もっと正確に言えば，単純な（＝イデアルが 0 とそれ自身以外にない）複素リー代数がディンキン図形と 1 対 1 に対応します*2)．

それぞれのディンキン図形には表 1 のように名前がついていて，上から 4 本は N がいくらでも大きくなれる無限系列なのに対して*3)，下の 5 つは例外的に存在が許されるもので，対応するリー群は**例外群**と呼ばれます．特に，その中でも一番長いもの，E_8 は特別な性質を持っていて，超弦理論ととても縁が深いのです*4)．ちなみに，このようなディンキン図形による分類，あるいは白丸たち—それを**ノード**（node）と言います—が 1 本線だけで結ばれている*5)図形による分類（**ADE 分類**）は，超弦理論やそれ以外の数理物理学でもいろんな所に顔を出すとても不思議な性質です．もし地球外にある程度の知的水準に達している高等生物がいたとして，地球から来た宇宙船の中からディンキン図形を発見したら，きっと私たち人類の知的水準の高さを知ることでしょう*6)．

さて，これらのディンキン図形がどのようにリー代数と関連するのかを見ましょう．まず，これらの図形に，ある正方行列で対角成分にそのノードと同じ数だけ 2 がならんだものを，次のようなルールで対応させます．すなわち，各ノードに番号をつけておいて，ノード k とノード l とが結ばれていたら，その行列の非対角 (k,l) 成分と (l,k) 成分に -1 を入れなさい，というルールです．ただし，2 本線だったら $<$ の向きに応じてどちらかを -2 に，3 本線だったらどちらかを -3 にします．それ以外の成分はすべて 0 にします．こうしてできた行列が**カルタン**（Cartan）**行列**です．例えば $A_1(=SL(2,\mathbb{C}))$ のカルタン行列はただの (2) だけ，$A_2(=SL(3,\mathbb{C}))$ なら $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ となります．

次に，カルタン行列の各成分によって，リー代数の基本的な生成子の間の交換関係を次のように定めます．まず，$SL(2,\mathbb{C})$ と同型な 3 つの生成子のセット (h_k,e_k,f_k) $(k=1,\ldots,N)$ をノードの数だけ用意します．次にカルタン行列を K_{ij} $(i,j=1,\ldots,N)$（N はノードの数）として，それらの間の交換関係を

$$[h_i,e_j]=K_{ij}e_j,\quad [h_i,f_j]=-K_{ij}f_j,$$
$$[e_i,f_j]=\delta_{ij}h_j,\quad [h_i,h_j]=0 \qquad (1)$$

と定めます*7)．各 k ごとに，h_k,e_k,f_k が 3 つの行列 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ に対応し，$SL(2,\mathbb{C})$ と同型になっています．さらに，関係式

$$(\mathrm{ad}e_i)^{1-K_{ij}}e_j=0,\quad (\mathrm{ad}f_i)^{1-K_{ij}}f_j=0 \quad (2)$$

を要請します．ただし $(\mathrm{ad}X)Y=[X,Y]$ のことです．関係式 (2) は **Serre 関係式**と呼ばれます．これらの

---

*2)　また，実リー代数を複素化してある複素リー代数が得られるとき，それをできた複素リー代数の実形と言いますが，それらも（多対 1 ですが）ディンキン図形と対応することになります．

*3)　上から（実形で言うと）$SU(N+1)$ や $SL(N+1,\mathbb{R})$ の系列，$SO(2N+1)$ の系列，$Sp(2N)$ の系列，$SO(2N)$ の系列に対応します．

*4)　超弦を含めた素粒子の文献では，リー群もそのリー代数も同じ記号で表すことが多く，本稿もそれに従います．

*5)　靴ひもを英語で shoelace と言いますが，それに見立ててそのようなグラフを **simply-laced** と言います．

*6)　この半分（以上？）冗談のような話は，昔，山田泰彦さん（神戸大理）に聞いたもので，この場を借りて感謝致します．

*7)　繰り返し添字に関して和をとらないことに注意．

ルールに基づいて，はじめに用意した $3N$ 個の基本的な元から自由に多重交換関係をとって新しい元をつくっていって，それら全体が生成するリー代数がディンキン図形に対応するリー代数になります．

A_2 の例で考えますと，まずノードが 2 個なので (h_1, e_1, f_1) と (h_2, e_2, f_2) を用意すると，(2) の上で述べたようにそれぞれは $SL(2,\mathbb{C})$ と同型です．さらに A_2 のカルタン行列の $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分が -1 なので $(\mathrm{ad}e_1)e_2 = [e_1, e_2]$, $(\mathrm{ad}f_1)f_2 = [f_1, f_2]$ は何かあっていいですが，それ以上 $\mathrm{ad}e_i$ や $\mathrm{ad}f_i$ をやると 0 としなければならないことが Serre 関係式によって要請されています．結局はじめの 6 個に $[e_1, e_2]$ と $[f_1, f_2]$ を加えた 8 個がそれぞれ 3×3 行列

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[e_1, e_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [f_1, f_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応して (1) と (2) を満たすことが確かめられます．

これと全く同様にして，表 1 の E_8 型のディンキン図形に対応するカルタン行列からつくったリー代数が E_8 で，それを e の指数に乗せたものが E_8 群です．

さて，互いに交換する h_i $(i = 1, \ldots, N)$ で生成されるリー代数の部分代数を**カルタン部分代数**といい，$\mathfrak{h}$ で表すことにします．すると，(1) を見てわかることは，e_j たちおよび f_j たちは，任意の $h_i \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}h_i$ の同時固有状態になっている，ということです．これは，$\mathfrak{h}$ が可換だからそういうものが許されわけですが，何か e_j なり，f_j なりを一つ固定して，$h_1, \ldots, h_N$ の ad に関する固有値を並べたとします．例えば A_2 なら，e_1 をとったとして

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}h_1)e_1 &= [h_1, e_1] = 2e_1, \\ (\mathrm{ad}h_2)e_1 &= [h_2, e_1] = -e_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

ですから $(2, -1)$ となります．これを e_1 に対応する**ルート**といいます．すると，任意の $\mathfrak{h}$ の元 $ah_1 + bh_2$ $(a, b \in \mathbb{C})$ に対して固有値 $2a - b$ が決まりますから，ルートは $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の元，つまり $\mathfrak{h}$ の関数です．このように，一般にはじめに用意した e_j $(j = 1, \ldots, N)$ の，$\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ に関する固有値で決まる $\mathfrak{h}$ の関数を**単純ルート**といって，α_{e_j} で表すことにします．$[e_1, e_2]$ などのように交換関係をとったものも $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ の固有状態になるのでルート $\alpha_{[e_1,e_2]}$ が考えられて，この場合には e_1 と e_2 の単純ルートの和 $\alpha_{e_1} + \alpha_{e_2}$ になります．

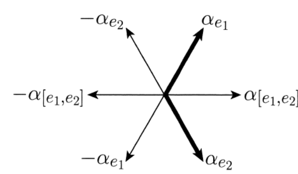


図 1　A_2 のルート系．

さて，カルタン行列のもう一つの性質は，ルートベクトル間の内積を · で表したとき，その (i,j) 成分が $\frac{2\alpha_{e_i} \cdot \alpha_{e_i}}{\alpha_{e_j} \cdot \alpha_{e_j}}$ になる，ということです．ADE 型のときにはすべてのルートの長さが等しいので分母を 2 に正規化できて，その場合には内積そのものになります．この内積は，$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ 不変な内積を $\mathfrak{h}^*$ の内積に焼き直したものです．例えば，再び A_2 なら，2 つのルートベクトル $\alpha_{e_1}, \alpha_{e_2}$ の内積行列 $\begin{pmatrix} \alpha_{e_1} \cdot \alpha_{e_1} & \alpha_{e_1} \cdot \alpha_{e_2} \\ \alpha_{e_2} \cdot \alpha_{e_1} & \alpha_{e_2} \cdot \alpha_{e_2} \end{pmatrix}$ が A_2 のカルタン行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ と等しいということです．すると，容易にわかりますように，単純ルート α_{e_1} と α_{e_2} は図 1 のような位置関係にあります．これが A_2 の**ルート系**です（厳密な定義は例えば文献 1) を参照してください）．

ちょっとルート系について長々と説明してしまいましたが，A_2 の例で一々説明したのは，これと同じことを E_8 でもイメージしていただきたかったからです．E_8 の場合にも，ディンキン図形に対応する図 1 のような単純ルートが 8 次元空間を張って，それから格子ができます．この格子が後で見るように著しい性質をもっているのです．

■ 3. 超弦の奇跡　その 1：E_8 格子と頂点作用素 ■

さて，いよいよ超弦です．超弦研究の歴史は，奇跡の発見の歴史です．そして，超弦理論を勉強し研究することは，感動体験の連続そのものです．しかし….そこにたどり着くまでにはかなり長くて退屈な下準備が必要になります．ここでは紙面の制約上，その概略だけをご紹介します[3)]．

超弦理論は 10 次元時空でのみ無矛盾に構成できます．「超」のない，つまり超対称性がない弦理論では 26 次元です．これは，どんなやり方をしても—弦を量

子化する方法はいろいろあるのですが—こういう結論になってしまうので，動かしがたい事実です．一方，我々の世界は 4 次元時空で，そこにある素粒子の標準模型につながるものを作りたいわけです．標準模型は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ のゲージ対称性を持っていますので，弦のほうでも 10 次元で非可換（non-abelian）ゲージ対称性を持つものを考えます．

非可換ゲージ対称性を弦理論で（摂動論的に）実現するのには，2 つの方法があります．一つ目は，開いた弦（open string）の両端に—その昔クォークをおいたように—フレーバー，というよりカラーと言ったほうがいいかもしれませんが，群の基本表現*8)の自由度を付与する方法です．この自由度は **Chan–Paton 因子**と呼ばれ，**タイプ I 超弦**の $SO(32)$ ゲージ対称性を実現しています．また，**D-ブレーン**が N 枚重なったときの $U(N)$ ゲージ対称性の起源とも言えます．これは一見大域的対称性の拡大に過ぎないように見えて，実はゲージ対称性をも拡大するのが非自明な所です．

もう一つは，これから説明しますように，閉じた弦（closed string）の**頂点演算子**（vertex operator）を使う方法です．「頂点演算子」というのは，ファインマン図形の頂点のように，弦理論においてそれぞれの振動モードに対応する粒子を放出・吸収を表す演算子のことです．

少し具体的に説明するために，ここで唐突ですが，次のような作用積分を考えます．

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_0^{2\pi}d\sigma\left((\partial_\tau X)^2+(\partial_\sigma X)^2\right). \quad (4)$$

これは，弦理論の教科書のはじめに必ず登場するボゾニック弦の作用で，詳細は参考文献をご覧いただくとして，とにかくこれを量子化します．ここで $(\partial X)^2$ というのは $\eta_{\mu\nu}\partial X^\mu\partial X^\nu$ のことで，$X^\mu(\tau,\sigma)$ ($\mu=0,1,\dots,25$) は弦の掃く 2 次元世界面の座標が (τ,σ) の部分が 25 次元時空のどこにいるかを表し，$\eta_{\mu\nu}$ は時空の計量 $\mathrm{diag}(-1,+1,\dots,+1)$ です．-1 があるために，X^0 の運動項が逆符号になってしまうので何とかしないといけないですが，何とかする方法はいろいろあるので*9)ここでは気にしないことにし，μ は 0 でない，空間方向成分だとします．そうすると，やることは，$X^\mu(\tau,\sigma)$ の運動方程式を適当な境界条件で解いてモード展開し，$X^\mu(\tau,\sigma)$ の共役運動量を求めてそれらの交換関係が i 倍の δ 関数になるようにモードの係数を演算子に「昇格」させればいいのです．$\eta_{\mu\nu}$ が対角なので各 μ ごとに行なえて，結果は閉じた弦の場合には

$$\begin{aligned}X^\mu(\tau,\sigma)\ =\ & x^\mu-i\alpha' p^\mu\tau \qquad (5)\\ & +i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\left(\frac{\alpha_n^\mu}{n}e^{-n(\tau+i\sigma)}+\frac{\tilde\alpha_n^\mu}{n}e^{-n(\tau-i\sigma)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[x^\mu,p^\nu]=i\eta^{\mu\nu},\quad [\alpha_n^\mu,\alpha_m^\nu]=n\eta^{\mu\nu}\delta_{n,-m},\\ &[\tilde\alpha_n^\mu,\tilde\alpha_m^\nu]=n\eta^{\mu\nu}\delta_{n,-m},\quad \text{その他}=0, \qquad (6)\end{aligned}$$

となります．$\tau+i\sigma$ に依存するモードを左向きモード，$\tau-i\sigma$ に依存するモードを右向きモードと呼んでいます．開いた弦の場合には，自由端（Neumann）条件か固定端（Dirichlet）条件によって異なりますが，大体似たような定在波による展開式で，振動励起モード演算子が 1 種類のものになります．

超弦の場合には，$X^\mu(\tau,\sigma)$ の数を 10 個にするとともに，2 次元面のフェルミオン $\psi^\mu(\tau,\sigma)$ も 10 個導入して，同じように適当な境界条件で展開を行ない量子化します．

さらに，26 個の X^μ のうちの 16 個の X^j ($j=10,\dots,25$) がある 16 次元トーラスにコンパクト化されていたとします．すると，今度は閉じた弦が巻き付くことが許されるので (5) には σ（弦の座標，$0\le\sigma\le 2\pi$）について 1 次の項も加わります．また，運動量 p^j も量子化されるので，(5) は $p^j\tau\to p_L^j(\tau+i\sigma)+p_R^j(\tau-i\sigma)$ に置き換わります．ここで，p_L^j と p_R^j はそれぞれ運動量と巻き付き数の 1 次結合で，別の 16 次元格子を走ります．この量子化された X^μ にある波数 k_μ の i 倍をかけて exp にのせ（て正規順序（normal-ordering）し）たものを（スカラー）頂点演算子といい，数学的に大変良い性質をもつことが知られています．

さて，このように閉じた弦の場合，$X^\mu(\tau,\sigma)$ は左向きモードと右向きモードの和に完全に分かれてしまいます（超弦の場合には ψ^μ も）．これは共形不変性の反映なのですが，これらは基本的に独立なので，右向きモードは超弦なのに左向きモードは超対称性のないボゾニック弦になっているようなものを考えること

*8) 異なるサイズの行列で同じ代数関係を実現できるとき，それらは「**表現**が異なる」と言います．例えば，$SO(3)$ のリー代数は $SU(2)$ のそれと交換関係は同じですが，前者は **3** 表現，後者は **2** 表現の表現行列です．

*9) (4) はもっと一般的な作用をゲージ固定したもので，もとのゲージ自由度を使って負ノルム状態があらわに出ないようにしたり，あるいは BRS 形式でそれらが効かないことが示せたりできます．これらが矛盾なくできる次元が 26 次元だったり 10 次元だったりするわけです．

が可能です．ところがボゾニック弦だと X^μ が 26 個ありますから左向きだけ $26-10=16$ 個分空間次元が余計です．そこからゲージ対称性が出るという理論が**ヘテロティック弦理論**です．具体的には，先ほどの X^j $(j=10,\ldots,25)$ の $\tau+i\sigma$ に依存する部分をヘテロティック弦の余分な 16 個の左向き空間次元とします．一方，10 次元部分については，左向きは (5) の $\tau+i\sigma$ 部分，右向きは (5) の $\tau-i\sigma$ 部分にフェルミオン $\psi^\mu(\tau,\sigma)$ の展開を加えた超弦のモード展開とします．

ところが，このように左と右を非対称に組んでしまうと，大抵は整合的でなくなってしまいます．**モジュラー不変**でなくなってしまうのです．閉じた弦の真空 1-ループ振幅は，2 次元トーラス形状の世界面の複素構造モジュラス τ（上の τ とは別）の関数ですが，$ad-bc=1$ をみたす 4 つの整数 a,b,c,d で $\tau\mapsto\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$（モジュラー変換）としても，座標を取り替えただけの同じトーラスを表すので，不変になっていないとおかしいのです．

左向きの 16 次元部分には，右向きの相棒がいませんので，それからの寄与はそれだけでモジュラー不変になっていないといけません．振幅をモジュラー変換すると，ある格子の状態和はその双対格子*10) の状態和に置き換わるので，左向きの 16 次元部分の運動量格子は自己双対（selfdual），つまり双対格子がそれ自身と一致するものでなければなりません．また，位相因子を打ち消してくれる相棒がいないので，位相因子は常に 1 になっていなければなりません．これから格子の長さの 2 乗はすべて偶数（even）になっていることが要求されます．

ユークリッド 16 次元には，偶数自己双対格子がただ 2 つだけ存在します[4]．一つは $SO(32)$ のルート格子（とスピナーウェイトの共役類の直和），もう一つは E_8 ルート格子の直和です．これらのリー代数のルートの一つを α_j とするとき，頂点演算子 $e^{i\alpha_j X^j}$（α_j は α の直交座標成分 $(\alpha'=2)$）の共形ウェイトは 1 となり，ゲージ粒子（の左向き部分）に対応します．このようにしてゲージ対称性を実現するのがそれぞれ **$SO(32)$ ヘテロティック弦理論**と **$E_8\times E_8$ ヘテロティック弦理論**です．

このような格子が存在するだけでも奇跡的ですが，もっとすごいことに，これら 2 つの群をゲージ群としたとき**のみ**，10 次元の**アノマリー**がすべて「奇跡的」に相殺できることが Green と Schwarz によって示されていたのです．これが有名な **Green–Schwarz** 機構で，もう詳しくは述べられませんが，それまでは Alvarez-Gaumé, Witten らによって，10 次元で超対称性 $=1$ の超弦理論は「ダメ出し」を食らっていたのです．$SO(32)$ は開弦で実現できていましたが，例外群は開弦ではできません．その最大のものだけが整合的に実現できるなんて，何て不思議なことではありませんか！

*10） 格子を張る基底ベクトルのセットが与えられたとき，その双対ベクトルたちによって張られる格子のこと．

■ 4. 超弦の奇跡　その 2：K3 曲面と特異点 ■

前節では 10 次元で超対称性の数が $N=1$ の理論についてお話しましたが，左右のモードをどちらも超弦にすれば $N=2$ の超弦ができます．その 2 つの超対称荷電のスピンが逆を向いているか同じかによって，それぞれタイプ IIA 弦，タイプ IIB 弦と呼ばれます．これらは 10 次元で非可換ゲージ対称性をもたないので，ヘテロティック理論とかなり違うように見えます．ところが，IIA 弦を **K3** という多様体にコンパクト化すると，それが実はヘテロティック弦を 4 次元トーラス（T^4）にコンパクト化した理論の別の記述であると考えられているのです．

K3 というのは，T^4 以外で唯一のコンパクトな**ハイパーケーラー多様体***11) です．2 つの超重力理論が一致することは古くから知られていたのですが，1994 年に Witten は，$E_8\times E_8$ ヘテロティック弦の T^4 コンパクト化においてヒッグズ機構が起こらずに非可換ゲージ対称性が残る状況は，IIA 弦がコンパクト化される K3 多様体が特異的になる状況と対応する，ということを初めて提唱しました．K3 の特異点は 2 節で出たような ADE 分類に従うのですが，ここでは特異点がどのように分類されるのか，簡単にお話しましょう．

図 2 のように，南極が複素平面の原点で接するように置かれた直径 1 の球，に内接する正四面体を考えましょう．一つの頂点が北極に，もう一つの頂点が北極と実軸を含む平面内にくるようにしました．すると，立体射影により正四面体群 T は，$\mathbb{C}\cup\{\infty\}=\mathbb{P}^1$（複素 1 次元射影空間）に作用します．その座標を $(z_1:z_2)$ としたとき，それらの斉次多項式でその作用で不変なものを考えます（不変式）．すると，すぐわかることは，

*11） 複素多様体で複素構造とリーマン計量とでつくった微分形式が閉（外微分が消える）のときケーラーといい，そのような複素構造が 3 つあって $SU(2)$ 代数を満たすときハイパーケーラーといいます．4 次元の場合ホロノミーが $SU(2)$ になって超対称性が半分になるので，もとはタイプ II でもヘテロティックと超対称性の数が同じになります．

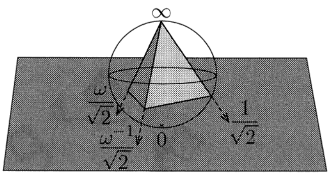


図2　正四面体の各頂点の複素平面への射影．

その多項式=0の解に，頂点や辺の中点，面の重心等，ある群作用で動かないものの投影先が含まれるとき，その多項式は一般の場合よりも低次になります．例えば，図2のように各頂点の投影先をすべて解にもつ多項式 $z_2(z_1-\frac{z_2}{\sqrt{2}})(z_1-\frac{\omega z_2}{\sqrt{2}})(z_1-\frac{\omega^{-1}z_2}{\sqrt{2}})$（$\omega$ は1の3乗根）は（$\mathcal{T}$ が12種類の操作からなる群にも関わらず）4次の不変式です．これを F_v とし，辺の中点，面の重心についても同様にして得られた不変式を F_e, F_f とすると，$x=F_e$, $y=F_vF_f$, $z=F_v^3-F_f^3$ は $\mathbb{C}^2/\tilde{\mathcal{T}}$（$\tilde{\mathcal{T}}$ は $\mathcal{T}$ に -1 倍も許した $\mathcal{T}$ の $SU(2)$ 版）の座標と見なせることが示せます[2]．ただし x,y,z には $x^4+y^3+z^2=0$ という関係式があるので，これは $\mathbb{C}^3$ のある曲面です．この原点にある特異点が**クライン特異点**で，この場合は E_6 に分類されるのです．

この特異点の何が E_6 なのかというと，特異点を**ブローアップ**して出てきた6本の直線の交わり方が E_6 のディンキン図と対応するのです．「ブローアップ」というのは特異点をスムーズにする方法で，$\mathbb{C}^3$ の1点ブローアップの定義は $\{((x_1,x_2,x_3),(\zeta_1:\zeta_2:\zeta_3))\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{P}^2|x_i\zeta_j=x_j\zeta_i(i,j=1,2,3)\}$ ですが，これを $\mathbb{R}^2$ で説明すると，例えば野球の守備練習でノックされた打球をキャッチしたらバックホームしなければいけないとするとき，キャッチャーは1人ですべての方向の送球を処理しないといけないですから忙しい（特異点）ので，ノックの方向ごとに別のキャッチャーをホームベース上に用意しよう，ということです．野球なら3方向3人ですみますが，打球の方向は連続的に変化するので，原点に直線が現れます．正四面体群 $\mathcal{T}$ の場合には6回ブローアップが必要で，その6本の直線のうち直線 k と l が交わっていたら (k,l) 成分は1（自分自身とはある定義で計算すると -2 となる）という行列をつくると，E_6 のカルタン行列の符号を変えたものにちょうど一致するのです．また，他の（二項）正多面体群 Γ でも同じようなことができて，これが特異点のADE分類です．

さて，これらの特異点では $\mathbb{C}^2$ の無限遠が Γ で同一視されているわけですが，このような同一視があるにも関わらず，原点でもスムーズな（非コンパクト）ハイパーケーラー多様体が70年代後半からすでに知られていました．これが有名な**江口–ハンソン空間**で，$A_1(\Gamma=\mathbb{Z}^2)$ の場合に相当するのですが，ほどなくGibbonsとHawkingによって一般の A_N に拡張されました．そして，他のsimply-lacedの場合にも1989年にKronheimerによって実現されました．これが**ALE空間**[*12]のADE分類です．つまり，ハイパーケーラー多様体の特異極限がADE分類されるのです．

Wittenの指摘の後，間もなくPolchinskiによってD-ブレーンが発見され，サイクル（ブローアップで出てきた直線）に巻き付いたD-ブレーンが，サイクルがつぶれるとともに軽くなって新しいゲージ粒子に対応する，と考えられるようになりました．このような「非摂動的なゲージ対称性の拡大」という考え方は，その後の弦理論の発展に大きな影響を与えたのです[*13]．

■　5. おわりに　■

本稿では，超弦理論にしばしば現れる E_8 群やADE分類について，主にゲージ対称性に関して駆け足でお話をしました．超弦理論とそれらの不思議な関係はまだまだたくさんあって，特に「群と弦理論」と表題を掲げる以上，M/タイプII理論の**U双対性**（U-duality）に触れないわけにはいかない，と最初は思いましたが，ページ数の関係でできませんでした．

もし本稿をお読みになった読者の皆さんに「超弦は面白そうだ」と思っていただけて，それが皆さんご自身で本格的に勉強や研究を始めるきっかけとなりましたら，それは私のこの上ない喜びです．

参考文献

1) 竹内外史『リー代数と素粒子論』（裳華房）．
2) 松澤淳一『特異点とルート系』（朝倉書店）．
3) 伊藤克司『運動する弦と振動—弦理論』数理科学2012年12月号（サイエンス社）とその引用文献．
4) P. Goddard and D. Olive, in: "Vertex operators in Mathematics and Physics" (Springer).

（みぞぐち・しゅんや，高エネルギー加速器研究機構）

*12) Asymptotically Locally Euclideanの頭文字をとったもの．ちなみにALF空間はAsymptotically Locally Flatですが，ALG空間，ALH空間というのもあって，こちらはシャレで名付けられたものです．

*13) IIB理論でも，楕円K3を利用してヘテロティック理論と双対な理論を構成でき，**F理論**と呼ばれています．その際には特異ファイバーの小平分類が同様の役割を果たします．

群と相対性理論

小玉　英雄

相対性理論は，自然法則の記述において特別な基準系が存在しないことを基本原理（相対性原理）とする法則記述の体系である[1)]．現実の世界では，異なる基準系に関する物理量の値は観測により対応が付くため，相対性原理は，この対応付けを表す物理量の変換に対して，自然法則が不変であることを要求することになり，法則の構造を強く規定する．この異なる基準系間での物理量の変換は，数学的には，物理量の空間における変換として表現され，その全体は群をなす．

一般相対性理論では，この変換群は時空多様体 M の微分同相変換の全体の作る無限次元群 $\mathrm{Diff}(M)$ となり，法則の不変性は共変性と呼ばれる．これは，一般にこの変換により時空構造が見かけ上変化するためである．しかし，時空が対称性をもつと，$\mathrm{Diff}(M)$ の有限次元部分群 G に対して時空計量が不変となる．この群 G が十分大きいと，時空構造は強く規定され，その上での物理法則に豊かな構造が現れる．例えば，特殊相対性理論は，この G が Poincaré 群となる場合に相当する．本稿では，このような高い対称性をもつ時空の構造，特に等長変換群と時空の無限境界の共形変換群の対応について詳しく解説する．

1. 光速不変性と共形 Killing ベクトル

特殊相対性理論は，慣性系に限定された**相対性原理**と（慣性系での）**光速の不変性**を基本原理とする理論体系である．この理論では，光速不変性が慣性系を決定する判定基準を与える．光速を c とすると，時空点 $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ を光源とする光波面の方程式は，$\Delta x^0 = c\Delta t = c(t-t_0)$, $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ を用いて

$$\Delta s^2 := \Delta\boldsymbol{x}^2 - c^2\Delta t^2 = \eta_{ab}\Delta x^a \Delta x^b = 0$$

と表される[*1)]．ここで，η_{ab} は，空間の次元を n, I_n を n 次の単位行列とするとき，定数行列

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

で与えられる．x^a が x^a_0 に近づいた極限では，上の式は次の無限小バージョンに帰着する：

$$ds^2 \equiv \eta_{ab}dx^a dx^b = 0. \tag{1}$$

光速不変性は，慣性系の間の座標変換がこの光波面の方程式を不変にすることを要求する（図 1）．この変換を一般に，$x'^a = f^a(x)$ とおくと，無限小バージョンの光波面の方程式の不変性は

$$ds'^2 \equiv \eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d dx^c dx^d = e^{2\Omega(x)}ds^2, \tag{2}$$

すなわち，

$$\eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d = e^{2\Omega(x)}\eta_{cd} \tag{3}$$

と表される．ここで，$\Omega(x)$ は f^a により決まる未知の関数，$\Lambda^a{}_c$ は行列関数

*1)　以下,「同一の項に同じ記号の上付き添え字と下付添え字が現れた場合は，その添え字について和を取る」という Einstein の和の規約を用いる．

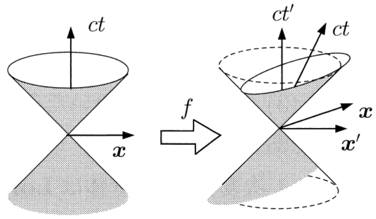


図 1　光速を保つ変換．

$$\Lambda^a{}_c := \frac{\partial f^a(x)}{\partial x^c}$$

である．この条件を満たす変換の全体の作る群は一般に Lie 群 G となる．G は位相的に連結でなく，単位元（=恒等変換）を含む連結成分を G_0 とすると，G_0 と適当な有限離散部分群 Γ の半直積 $G \cong G_0 \rtimes \Gamma$ と同型となる．

連結部分 G_0 は次のようにして決定される．まず，恒等変換に近い変換（無限小変換）$\delta x^a = f^a(x) - x^a = \xi^a$ を考えると，(3) は

$$\partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a = 2\omega \eta_{ab}, \quad \omega = \frac{1}{n+1}\partial_a \xi^a \quad (4)$$

となる（$\xi_a = \eta_{ab}\xi^b$）．この方程式は（Minkowski 時空の）**共形 Killing 方程式**と呼ばれる．

この方程式を直接一般的に解くことも可能であるが，ここでは $n \geq 2$ として，少し違ったアプローチで完全解を求める．そのため，まず，ξ が x^a の 2 次以下の多項式であるとして，解を求める．

$$\xi^a = c^a + \lambda^a{}_b x^b + \frac{1}{2}\sigma^a{}_{bc} x^b x^c$$

を (4) に代入すると，定数係数 $\lambda^a{}_b$ と $\sigma^a{}_{bc}$ に対する分離した同次線形方程式

$$\lambda_{ab} + \lambda_{ba} = \frac{2}{n+1}\lambda^c{}_c \eta_{ab},$$
$$\sigma_{abc} + \sigma_{bac} = \frac{2}{n+1}\sigma^d{}_{dc}\eta_{ab}$$

を得る．第 1 式の一般解は，容易に求まり，

$$\lambda_{ab} = d\eta_{ab} + \omega_{ab}, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

となる．また，$\sigma^d{}_{dc} = l_c$ とおくと，第 2 式の一般解は

$$\sigma^a{}_{bc} = \frac{1}{n+1}\left(l_b \delta^a_c + l_c \delta^a_b - l^a \eta_{bc}\right)$$

で与えられる．これらは全体で，$(n+2)(n+3)/2$ 個の線形独立な解を与える．ところが，次節で示すように，$n \geq 2$ のとき，これは (4) の持ち得る線形独立な解の最大数と一致する．したがって，$n \geq 2$ のとき，すべての解を求めたことが保証される．

2. Minkowski 時空の共形変換と Poincaré 群

1 節で求めた無限小変換の全体は，閉じた Lie 代数を成す．したがって，Lie 群の一般論に従うと，これらは連結 Lie 群 G_0 の普遍被覆群を一意的に定義する．実際，ベクトル場 P_a, M_{ab}, S, Q_a を

$$P_a = \partial_a, \quad M_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b, \quad (5a)$$
$$S = x^a \partial_a, \quad Q_a = x_a x \cdot \partial - \frac{1}{2}x^2 \partial_a \quad (5b)$$

により定義すると，今求めた無限小変換は

$$\delta x^a \partial_a = c^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{ab} M_{ab} + dS + \frac{2}{n+1} l^a Q_a$$

と表され，代数的に閉じた交換関係を与える：

$$[M_{ab}, M_{cd}] = 2\eta_{a[d} M_{c]b} - 2\eta_{b[d} M_{c]a},$$
$$[M_{ab}, P_c] = 2\eta_{a[c} P_{b]}, \quad [M_{ab}, Q_c] = 2\eta_{c[a} Q_{b]},$$
$$[S, P_a] = -P_a, \quad [S, Q_a] = Q_a, \quad [S, M_{ab}] = 0,$$
$$[P_a, P_b] = 0, \quad [Q_a, Q_b] = 0,$$
$$[P_a, Q_b] = \eta_{ab} S + M_{ab}. \quad (6)$$

この Lie 代数に対応する連結 Lie 群は $SO_0(n+1, 2)$ と局所同型となる．ここで，$SO(p,q)$ は，非正値計量

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

をもつ空間 $E^{p,q}$ の特殊直交変換の全体が作る群

$$SO(p,q) := \left\{ V \in SL(p+q, \mathbb{R}) \,\middle|\, {}^T V I_{p,q} V = I_{p,q} \right\},$$

である．$SO_0(p,q)$ はその単位元を含む連結成分で，$SO(p,q) \cong SO_0(p,q) \rtimes \mathbb{Z}_2$ $(pq \neq 0)$ である．$I_{p,q}$ に相当する計量テンソルを η_{AB} と書くと，$SO(p,q)$ の Lie 代数の交換関係は，条件 $(p+q)(p+q-1)/2$ 個の基底 $M_{\mathrm{AB}} = -M_{\mathrm{BA}}$ $(\mathrm{A}, \mathrm{B} = 1, \cdots, p+q)$ を用いて

$$[M_{\rm AB}, M_{\rm CD}] = 2\eta_{\rm A[D}M_{\rm C]B} - 2\eta_{\rm B[D}M_{\rm C]A} \tag{7}$$

と表される．

実際，$E^{n+1,2}$ の計量を座標の 1 次変換により

$$ds^2 = \eta_{\rm AB}dx^{\rm A}dx^{\rm B} = \eta_{ab}dx^a dx^b + 2dx^+dx^-$$

と変換し，交換関係 (7) において

$$M_{+-} = S, \quad M_{+a} = P_a, \quad M_{-a} = Q_a$$

とおくと，交換関係 (6) が得られることが容易に確かめられる．

ただし，これは抽象群 $SO_0(n+1,2)$ のすべての元に対し，光速不変性の要請を満たす変換が実際に存在することを意味するわけではない．これを見るために，Lie 代数の元に対応する無限小変換 ξ^a が与えられると，それに対応する 1 径数変換群 $\varPhi_s$ が ξ^a の軌道を求めることにより定まることを用いる．すなわち，常微分方程式

$$\frac{dx^a(s)}{ds} = \xi^a(x(s)), \quad x(0) = x_0$$

の解を用いて，$\varPhi_s(x_0) = x(s)$ により，変換 $\varPhi_s : x_0 \mapsto x(s)$ を定義すると，パラメータ s の任意の値に対して解が存在する場合には，$\varPhi_s$ は s を加法的パラメータとする 1 次元群となり，自然に Lie 代数に対応する Lie 変換群の部分群と見なすことができる（文献 1) の §8.2 参照）：

$$\varPhi_0 = \mathrm{id}, \quad \varPhi_{s_1} \circ \varPhi_{s_2} = \varPhi_{s_1+s_2}.$$

この方法で，$l^a Q_a$ に対応する変換を求めると，

$$x^a = \frac{x_0^a - \frac{s}{2}x_0^2 l^a}{\frac{s^2}{4}l^2 x_0^2 - s x_0\cdot l + 1}$$

となる．この変換は，$s(\neq 0)$ をどのようにとっても，分母がゼロとなり特異となる x_0 が存在することが容易に確かめられる．すなわち，時空全体で定義された変換にはならない．したがって，異なる基準型を結びつける変換と見なすことはできない．

この変換を除いた残りの無限小変換は，時空全体で定義された正則な変換群を与える．まず，P_a と M_{ab} は，明らかに **Poincaré 変換**

$$x'^a = \Lambda^a{}_b x^b + c^a$$

の無限小変換と対応する（$\delta\Lambda^a{}_b = \omega^a{}_b$）．ここで，$\Lambda = (\Lambda^a{}_b)$ は (3) で $\varOmega \equiv 0$ とおいた条件式を満たす定数行列である．明らかに，c^a の全体は**並進群** $\mathbb{R}^4$ を成し，1 次変換 Λ の全体は **Lorentz 群** $O(n,1)$ となる．変換群全体は，これらの半直積 $O(n,1)\ltimes\mathbb{R}^4$ と同型となり，**Poincaré 群**ないし**非同次 Lorentz 群**と呼ばれる．

一方，無限小変換 S は明らかに，すべての座標を一定倍にスケールする変換 $x'^a = \lambda x^a \quad (\lambda > 0)$ を生成する．物理法則がこの変換で不変とすると，自然法則は質量などの特別のスケールを基本定数として持つことができなくなる．このため，特殊相対性理論では，この変換を慣性系の変換に含めず，Poincaré 群を基本的な変換群とする．

3. Riemann 多様体の極大対称性

一般相対性理論では，重力は時空計量

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

で記述され，基準系の変更により消去できない重力場が存在するとき，時空は非自明な構造をもつ．そのような非自明な時空がどのような対称性を持つかは，しばしば重要な物理的意味をもつ．例えば，時空計量を保つ変換（**等長変換**）が存在すると，対応するエネルギーや運動量の保存則が得られる[2]．また，スケール不変な方程式に従うゼロ質量場に対しては，高々局所的なスケールの変更を除いて計量が保たれる変換

$$\varPhi^* g = e^{2\varOmega(x)} g \tag{8}$$

が存在すれば，同じく保存則が得られる．この変換は，等長変換を特殊な場合として含み，**共形変換**と呼ばれる．前節で扱った変換は，Minkowski 時空の共形変換にあたる．一般の D 次元 Riemann 多様体でも，共形変換群の単位元を含む連結成分は，**共形 Killing 方程式**

$$\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = 2\omega g_{\mu\nu}, \quad \omega = \frac{1}{D}\nabla_\lambda\xi^\lambda \tag{9}$$

の解である**無限小共形変換**（**共形 Killing** ベクト

ル場）$\delta x^\mu = \xi^\mu$ により生成される．

次元 D が 3 以上のとき，共形 Killing 方程式は常微分方程式に帰着することができる．実際，

$$F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu}\xi_{\nu]}, \quad \omega_\mu = \nabla_\mu \omega$$

とおくと，任意の曲線 C にそって次の方程式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\nabla_u \xi_\mu = u_\mu \omega + u^\nu F_{\nu\mu}, \\
&\nabla_u F_{\mu\nu} = -R_{\mu\nu\lambda\sigma} u^\lambda \xi^\sigma - 2u_{[\mu}\omega_{\nu]}, \\
&\nabla_u \omega = u^\mu \omega_\mu, \\
&(D-2)\nabla_u \omega_\mu = -\left(2R_{\mu\nu}u^\nu - \frac{Ru_\mu}{D-1}\right)\omega \\
&\qquad - \left(u^\nu \nabla_\alpha R_{\mu\nu} - \frac{1}{2(D-1)} u_\mu \nabla_\alpha R\right)\xi^\alpha \\
&\qquad - 2u^\nu R^\alpha_{(\mu} F_{\nu)\alpha}.
\end{aligned}$$

ここで，u は曲線 C の接ベクトルである．曲線 C を $x^\mu(s)$ とパラメータ表示すると，左辺の $u^\mu = dx^\mu/ds$ 方向の共変微分は

$$\nabla_u \xi_\mu = \frac{d\xi_\mu}{ds} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\xi_\nu u^\lambda$$

のように書けるので，上記の方程式系は，$\xi_\mu(s) = \xi_\mu(x(s))$, $F_{\mu\nu}(s) = F_{\mu\nu}(x(s))$, $\omega(s) = \omega(x(s))$, $\omega_\mu(s) = \omega_\mu(x(s))$ に対する閉じた常微分方程式系と見なすことができる．したがって，適当な点 O を原点として固定し，そこでのこれらの量の値を与えると，O を始点とし勝手な点 P を終点とする曲線に沿ってこの常微分方程式を解くことにより，P での値が決まることになる．ただし，O と P を結ぶ曲線は無限にあり，異なる曲線で求まった P の値が異なる場合には，この初期値に対する解は存在しないことになる．したがって，$D \geq 3$ のとき，(9) の 1 次独立な解の数は，一点 O での初期値の自由度 $D + D(D-1)/2 + 1 + D = (D+1)(D+2)/2$ 以下となる．同様にして，$\omega \equiv 0$ に相当する Killing 方程式の解，すなわち無限小等長変換の独立な解の最大数は，$D \geq 1$ に対し，$D + D(D-1)/2 = D(D+1)/2$ となる．

4. 極大対称空間

等長変換に関して，この許される最大の対称性をもつ空間は**極大対称空間**と呼ばれ，物理学でも非常に重要な役割を果たす．上の議論で $F_{\mu\nu}$ は局所的な回転（Lorentz 変換）を生成するので，それが最大数の $D(D-1)/2$ となるという要請は，空間が各点で等方であることを意味する．また，残り D 個の Killing ベクトルは空間の次元と同じ数の並進の自由度に対応する．したがって，極大対称空間は**一様等方空間**となる．このことを用いると，極大対称空間は Euclid 空間 E^D，球面 S^D，双曲空間 H^D に限られることが容易に示される．

Euclid 空間の等長変換群は，明らかに Euclid 群 $IO(D) \cong O(D) \ltimes \mathbb{R}^D$ である．また**球面** S^D の等長変換群は，$O(D+1)$ となる．これは S^D を Euclid 空間 E^{D+1} に $\delta_{\mathrm{AB}}X^{\mathrm{A}}X^{\mathrm{B}} = R^2$ と埋め込むことができることより分かる．最後に，**双曲空間** H^D は，$D+1$ 次元 Minkowski 時空 $E^{D,1}$ に

$$\eta_{\mathrm{AB}}X^{\mathrm{A}}X^{\mathrm{B}} = -R^2 \quad (X^0 > 0) \qquad (10)$$

と埋め込むことができる[3)]（図 2）．これは Lorentz 変換で不変であるので，等長変換群は $O_+(D,1) = \{\Lambda \in O(D,1) \mid \Lambda^0{}_0 > 0\}$ となる．

これら 3 種の空間は大域的性質が大きく異なるが，すべて**共形的に平坦**である．実際，これらの空間の計量は，$D = n+1$ として，極座標表示で

$$\begin{aligned}
ds^2 &= R^2(d\chi^2 + f(\chi)^2 d\Omega_n^2) \\
&= R^2 h^2(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_n^2)
\end{aligned}$$

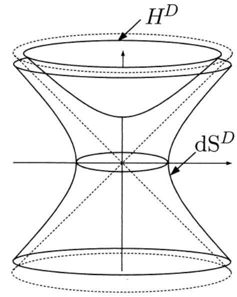


図 2　$E^{D,1}$ に埋め込まれた H^D と dS^D.

と表される．ここで，$d\Omega_n^2$ は n 次元単位球面 S^n の計量，$dr/r = d\chi/f(\chi)$ で，$f(\chi) = \chi\,(E^D)$, $\sin(\chi)\,(S^D)$, $\sinh(\chi)\,(H^D)$ である．これより，明らかに，いずれの空間の計量 g に対しても，適当な写像 Φ が存在して $\Phi^* g = e^{2\Omega} g(E^D)$ が成り立つ．このため，共形 Killing ベクトルの作る Lie 代数は一致する．1 節の議論は Euclid 空間でもそのまま成り立つので，この Lie 代数は $SO(D+1,1)$ の Lie 代数と同型となる．

5. 定曲率空間の共形変換群と漸近対称性

1 節で扱った Minkowski 時空と同様，$SO(D+1,1)$ のうち Euclid 空間では等長変換とスケール変換のみが大域的に正則な変換群として実現される．双曲空間 H^D の場合は，(10) のように $E^{D,1}$ に埋め込むと（簡単のため $R=1$ とする），超曲面としての H^D に接する $E^{D,1}$ のベクトル場

$$\xi^\mu : \delta X^{\rm A} = l^{\rm A} - \epsilon(l\cdot X)X^{\rm A} \ /\!/ \ H^D$$
$$({\rm A} = 0, \cdots, D) \qquad (11)$$

$(\epsilon = -1)$ が等長でない無限小共形変換の基底を与える $(\omega = -\epsilon l\cdot X)$．これらは，定数ベクトル l^A が時間的なときは大域的に正則な変換を生成するが，空間的なときは生成された変換は特異点をもつ．

これに対して，球面 S^D の場合には状況が異なる．この場合には，(11) において $\epsilon = 1$ とおいたベクトル場が非等長的な無限小共形変換の基底を与える．これらの無限小変換は常に正則な大域的変換を生成する．これを確かめるには，例えば $l^{\rm A}$ が E^{D+1} における球面の北極向きの単位ベクトル $(l^{\rm A}) = (0, \cdots, 0, c)$ の場合を調べればよい．他の場合は回転によりこの場合に帰着される．この $l^{\rm A}$ に対するベクトル場 (11) は，球面上で北極と南極を結ぶ大円に沿っており，北極からの天頂角を θ とすると，対応する軌道の方程式は単に $d\theta/ds = -c\sin\theta$ となる．この解は θ のみの変換

$$\tan(\theta/2) = e^{-cs}\tan(\theta_0/2)$$

となり，任意の $s > 0$ で大域的に正則となる．

ここで，慧眼な読者は，球面 S^D の**共形変換群** $O(D+1,1)$ がなぜ 1 次元高い双曲空間 H^{D+1} の等長変換群と一致しているのか不思議に思うに違いない．実はこれには理由がある．ポイントとなるのは，双曲空間 H^{D+1} の無限遠が球面 S^D と同一視できることにある．

双曲空間 H^{D+1} の同次座標系 $X^{\rm A}$ を

$$X^a = \sinh(\chi\phi(\Omega))\Omega^a \quad (a = 1, \cdots, D+1),$$
$$X^0 = \cosh(\chi\phi(\Omega))$$

と表すと，$\Omega^a (\Omega^2 = 1)$ を**無限遠球** S^D の座標系と見なすことができる．ここで，$\phi(\Omega)$ は Ω のなめらかな関数である．明らかに，ϕ を定数にとっても，この無限遠球の計量は一意的には定まらず定数倍の自由度が残る．また，ϕ が一般の関数のとき，$\chi =$ 一定面の計量は単位球面と共形的となる．このため，H^{D+1} の等長変換は一般に無限遠球の共形変換を誘導する．実は今の場合，この対応が H^{D+1} の等長変換群と S^D の共形変換群の同型対応を与える．実際，$\phi = 1$ となる標準的な対応では，$O(D+1,1)$ の部分群 $O(D+1)$ はそのまま，S^D の等長変換群と対応する．さらに，ブーストに当たる無限小変換

$$M_{0a} = X_a\partial_0 - X_0\partial_a \quad (a = 1, \cdots, D+1) \qquad (12)$$

は，E^{D+1} に埋め込まれた無限遠球面 (Ω^a) において，無限小変換

$$l^a M_{0a} \mapsto l^a - (l\cdot\Omega)\Omega^a \qquad (13)$$

を誘導することが確かめられる．これは，ちょうど S^D の非等長的共形 Killing ベクトルと対応する．

6. 反 de Sitter 時空の漸近対称性

極大対称空間と同様に，**極大対称時空**も 3 つのタイプ，Minkowski 時空 $E^{n,1}$，**de Sitter 時空** dS^D，**反 de Sitter 時空** adS^D に限られる．これらは，一様等方なので**定曲率時空**となり，λ を定数として，曲率テンソルが

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \lambda(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}),$$

と表される．Minkowski時空は $\lambda=0$，de Sitter時空は $\lambda>0$，反de Sitter時空は $\lambda<0$ に当たる．Einstein方程式を用いると，λ は宇宙定数 Λ と次の関係にある：

$$\Lambda=\frac{(D-1)(D-2)}{2}\lambda.$$

de Sitter時空は $E^{D,1}$ に，反de Sitter時空は $E^{D-1,2}$ に2次超曲面として等長的に埋め込むことができる[3]（図2）[*2]：

$$\eta_{\mathrm{AB}}X^{\mathrm{A}}X^{\mathrm{B}}=\epsilon\ell^2(=1/\lambda). \tag{14}$$

dS^D に対して $\epsilon=1$，adS^D に対して $\epsilon=-1$ である．これより，等長変換群がそれぞれ，$O(D,1)$ および $O(D-1,2)$ となることが分かる．また，計量が局所的に

$$ds^2=\ell^2[-d\tau^2+\tilde{f}(\tau)^2d\sigma^2]$$

と表されるので，de Sitter時空も反de Sitter時空も局所的に共形的に平坦である．ここで，$d\sigma^2$ は単位双曲空間 H^{D-1} の計量，$\tilde{f}$ は，

$$\tilde{f}(\tau)=\begin{cases}\tau & ;E^{D-1,1},\\ \sinh\tau & ;\mathrm{dS}^D,\\ \cos\tau & ;\mathrm{adS}^D.\end{cases}$$

したがって，無限小共形変換の作るLie代数はすべての定曲率時空で一致し，1節で求めた $SO(D,2)$ のLie代数と同型となる．ただし，dS^D および adS^D を上記のように $E^{p,q}$ に埋め込むと，非等長的共形Killingベクトルは(11)式と同じ表式で与えられ，その軌道から定義される変換は，

$$X^{\mathrm{A}}=\frac{X_a^{\mathrm{A}}+l^{\mathrm{A}}\left\{\frac{1}{k}\sinh(ks)+\frac{l\cdot X_0}{l^2}(\cosh(ks)-1)\right\}}{\cosh(ks)+\epsilon\frac{l\cdot X_0}{k}\sinh(ks)}.$$

と表される．ここで，$k=\sqrt{\epsilon l^2}$ である．これより，定数ベクトル l^{A} が光的ないし時間的ならこの変換は特異点をもち，大域的な変換とならない．したがって，群 $SO(D,2)$ はどの定曲率時空でも大域的変換群としては実現されない．

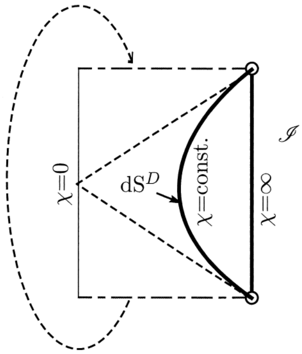


図3　adS^{D+1} の無限遠境界.

しかし，adS^{D+1} の等長変換群 $O(D,2)$ が dS^D の（形式）共形変換群と一致することから予想されるように，H^D の場合に起きた等長変換群と無限遠境界の共形変換群の対応は，反de Sitter時空に拡張される．実際，$E^{D,2}$ の計量の符号を $[-1,1,\cdots,1,-1]$ と取り，

$$X^a=\ell\sinh\chi\Omega^a\quad(a=0,\cdots,D),$$
$$X^{D+1}=\ell\cosh\chi$$

とおくと，$\eta_{ab}\Omega^a\Omega^b=1$ となるので，$\chi=$ 一定面は dS^D と共形となり，$\chi\to\infty$ でこの面は無限遠に遠ざかる（図3）．したがって，adS^{D+1} の無限遠は dS^D と共形となる．さらに，計量の符号が変わる点を除いて，5節の(12)式から(13)式を導く議論がそのまま成り立つ．

このように，反de Sitter時空の等長変換群がその無限遠境界と共形同型な1次元低い定曲率時空の共形変換群と1対1に対応することは，$D+1$ 次元反de Sitter時空での重力理論と D 次元時空での共形不変な場の量子論が対応するという**adS/CFT予想**[4]の根拠の一つとなっている．

*2）正確には，このように $E^{D-1,2}$ に埋め込まれた超曲面は $S^1\times\mathbb{R}^{D-1}$ という位相構造をもち，S^1 因子に対応する閉曲線が時間的となる．この因果律の破れは，超曲面の普遍被覆を考えることで解消される．通常，adS^D としてはこの被覆空間 $\widetilde{\mathrm{adS}}^D\cong\mathbb{R}^D$ を考えることが多い．

参考文献

1) 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）．
2) 小玉英雄：数理科学 **502**, 27–33 (2005).
3) 小玉英雄，佐藤文隆：『一般相対性理論』（岩波書店，2000）．
4) Maldacena, J.: *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231–252 (1998).

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）

量子群とパンルヴェ方程式

長谷川　浩司

1. 序

量子群と可積分系というお題をいただいた．「解ける」微分方程式がなぜ解けるのか，その理解を深めることで裾野を広げたのが可積分系ともいえる．保存量あるいは対称性の存在が系をより解きやすくする．対称性の全体が群をなせば，群から逆にすべての可積分系を導けないか，という動機も生まれる．この方向としては，まずは球関数の理論の一般化を挙げるべきであろうし，群として無限次元のもの（アフィン・リー群）をとれば，カロジェロ系やルイセナース系など，特に楕円関数が登場する可積分系で本稿とも関係の深いものがある．量子群は，それらの差分化にまさに対応してもいるが，ここではやや別の話題を書いてみたい．

量子群が登場したのは1980年代である．量子群は，$SU(2)$ や $SL_2(\mathbb{C})$ などのリー群（のリー環）を，ホップ代数として変形して得られる．一般に線型リー群（行列の連続群）G のリー環 $\mathrm{Lie}(G)$ とは，行列の指数関数 e^{tX} がすべての実数 t について G に含まれているような X の全体である．群の原点での接方向の全体であり，ベクトル空間となるが，さらに群の演算が遺伝して括弧積 $[A,B]=AB-BA$ で閉じている．

$SL_2(\mathbb{C})$ のリー環 $\mathrm{Lie}(SL_2(\mathbb{C}))=sl_2$ は，トレースが0の2次行列全体であり，$e^+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$e^-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ を基底にもつ．リー環の演算で sl_2 は閉じており，

$$[h,e^{\pm}]=\pm 2e^{\pm},\ [e^+,e^-]=h$$

であることは簡単な計算である．この関係式を，0でないパラメータ q によって変形し

$$[h,e^{\pm}]=\pm 2e^{\pm},\quad [e^+,e^-]=\frac{q^h-q^{-h}}{q-q^{-1}}$$

として得られるのが最も簡単な量子群であり，文字 e^+，e^-，h が生成するこの代数を $U_q(sl_2)$ と書く．$\hbar=\log q$ $(q=e^{\hbar})$ でテーラー展開し $\hbar\to 0$ とすると，$[e^+,e^-]=h$ が復元される．$\hbar\neq 0$ のときは右辺は h のベキの無限和であり，演算 $[,]$ で閉じた3次元の構造は壊れているが，ホップ代数と呼ばれるものになっている．ホップ代数はいくつかの性質を（群の定義と同じように）満たす代数と定義されるが，表現のテンソル積が考えられるというのが特徴の一つである．実際，

$$\Delta(e^+)=e^+\otimes 1+q^h\otimes e^+,$$
$$\Delta(e^-)=e^-\otimes q^{-h}+1\otimes e^-,$$
$$\Delta(h)=h\otimes 1+1\otimes h$$

とすれば，$\Delta: U_q\to U_q\otimes U_q$ $(U_q=U_q(sl_n))$ という準同型が定まる．表現とは，考えている代数（今は U_q）の元を何らかのベクトル空間 V 上の線型写像（$\mathrm{End}(V)$ の元）として行列表示することで，つまり準同型 $\rho: U_q\to\mathrm{End}(V)$ であるが，Δ を使うと2つの表現 $\rho_i: U_q\to\mathrm{End}(V_i)$ $(i=1,2)$ から $V_1\otimes V_2$ 上に新たな表現ができる．

$$U_q\ni x\mapsto(\rho_1\otimes\rho_1)(\Delta(x))\in\mathrm{End}(V_1\otimes V_2)$$

とすればよい．$(\Delta\otimes 1)\Delta=(1\otimes\Delta)\Delta$ が成り立つことから，3つ（以上）のテンソル積について

$$(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\simeq V_1\otimes(V_2\otimes V_3) \qquad (1)$$

が成り立つ．一方 $q\neq 1$ のとき $\Delta(e^{\pm})$ は第1成分と第2成分を入れ替えた $\Delta'(e^{\pm})$ と異なるから，

$V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$ は一般に成り立たない．ただし，普遍 R 行列と呼ばれる $U_q \otimes U_q$ の無限和 $\mathcal{R}$ があって，Δ と Δ' を取り持つ：

$$\mathcal{R}\Delta(a) = \Delta'(a)\mathcal{R} \quad (\forall a \in U_q).$$

$\rho_1 \otimes \rho_2(\mathcal{R})$ は収束すれば $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$ を定める．$\mathcal{R}$ の作用が意味を持つ限り 3 つ（以上）のテンソル積 $V_i \otimes V_j \otimes V_k$ ($\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$) も順序によらず同型となり，その元締めとして

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \tag{2}$$

($\mathcal{R} = \sum_i a_i \otimes b_i$ のとき $\mathcal{R}_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$ などである）が成り立つ．この**ヤン・バクスター方程式** (2) はもともとイジング模型やハイゼンベルグ模型など，統計物理の 2 次元可解模型に登場し，その理解を深める中で量子群は発見された．量子群は当初から可積分系と縁が深い．

その可積分系として，ここではパンルヴェ方程式を取り上げ，量子群との関係を紹介したい．格子模型と量子群の関係を復習する形にもなり，格子模型を再考する上でも意味があると思うのである．

2. 方程式 $\mathbf{P_{VI}}$，その差分化 $\boldsymbol{q}\mathbf{P_{VI}}$

パンルヴェ方程式には I 型から VI 型の 6 つがある．100 年あまり前に，「方程式で解の特異性が規定される」（動く特異点が極のみ）という条件をもつ非線型 2 階常微分方程式を探し発見された．当初はポアンカレが数学における孤島と評したというが，ハミルトン系としての定式化，およびモノドロミー保存変形という視点と繋がったことは幸いだったろう．解の超越性に関する梅村浩の研究，対称性を明らかにしつつ初期値空間という概念を導入した岡本和夫による研究を経て，神保道夫と坂井秀隆は 1996 年に離散（差分）パンルヴェ VI 型方程式（$q\mathrm{P_{VI}}$）を提出した．q は差分のステップに関係する乗法的パラメータである．本稿はさらに，$q\mathrm{P_{VI}}$ の量子化 $\widehat{q\mathrm{P_{VI}}}$ についてのお話である．

まずパンルヴェ VI 型方程式（$\mathrm{P_{VI}}$）とは，$y = y(t)$ の次の常微分方程式である．$' = d/dt$ とする．

$$\begin{aligned} y'' = &\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t}\right)\frac{y'^2}{2} \\ &- \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t}\right)y' + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \\ &\times \left(\alpha + \beta\frac{t}{y^2} + \gamma\frac{t-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right). \end{aligned}$$

I–V 型はこの退化として得られ，パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が退化ごとに減っていく．

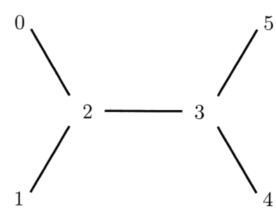
この難解な方程式も，差分化および量子化（非可換化）すると，格子模型のありふれた仕組みで理解できる，ということが本稿の主題である．

差分版にすることで量子群へ一歩近づく．連立系

$$\begin{aligned} y(t)y(pt) &= \frac{p^2}{t^2}\frac{x(t)+a_1^{-2}p^{-1}t}{x(t)+a_0^{-2}pt^{-1}} \cdot \frac{x(t)+a_1^2p^{-1}t}{x(t)+a_0^2pt^{-1}}, \\ x(t)x(p^{-1}t) &= \frac{1}{t^2}\frac{y(t)+a_4^{-2}t}{y(t)+a_5^{-2}t^{-1}} \cdot \frac{y(t)+a_4^2\,t}{y(t)+a_5t^{-1}} \end{aligned}$$

が神保–坂井の $q\mathrm{P_{VI}}$ である．t の従属変数 $x(t), y(t)$ の他はパラメータであり，$x(p^{-1}t)$ と $x(t)$ で $x(pt)$ が決まる 2 階の常差分方程式である．

この方程式は $D_5^{(1)}$ 型アフィンワイル群と仲良しで，ルート系の記号との関係では $p = e^{\delta}, a_i = e^{\alpha_i}$ と見るのが良い．$D_5^{(1)}$ 型のカルタン行列 $[C_{ij}]$ は，対角成分が 2 で，次の図形で i, j が結ばれていれば $C_{ij} = -1$，その他の成分は 0 として定まる．



このとき，$W(D_5^{(1)})$ 型ワイル群の作用が

$$\begin{aligned} &s_i(a_j) := a_i^{-C_{ij}}a_j = e^{s_i(\alpha_j)}, \\ &s_2(x(t)) := \frac{a_0a_1^{-1}y(t) + a_2^2}{a_0a_1^{-1}a_2^2y(t) + 1}x(t), \\ &s_3(y(t)) := \frac{a_3^2a_4a_5^{-1}x(t) + 1}{a_4a_5^{-1}x(t) + a_3^2}y(t), \\ &s_j(x(t)) := x(t)\ (j \neq 2),\quad s_j(y(t)) := y(t)\ (j \neq 3) \end{aligned}$$

で定まり，部分群 $\langle s_2s_3s_2 = s_3s_2s_3, s_i(i = 0, 1, 4, 5)\rangle \simeq W(D_4^{(1)})$ の作用は時間発展 $q\mathrm{P_{VI}}$ と可換である．実は $q\mathrm{P_{VI}}$ の時間発展は，$D_5^{(1)}$ の中に入っている $D_4^{(1)}$ と「直交する方向へ進む」作用であり，連続版はその極限である．対称性のみに注目して方程式を再現することもできる．

ちなみに，ソリトン系の次元簡約としてパンルヴェ系が（すべて）現れるという観察も多くなされている（筧三郎–菊地哲也，…）．ソリトン系とは，KdV 方程

式やこれを含むKP階層，同様に扱える戸田場方程式などの非線型偏微分方程式系であるが，佐藤幹夫の理論により無限次元の多様体における無限個の可換なフローとして捉えられている．もとの方程式と可換な，自由度の分だけのフローがあるという意味で，これは可積分系と言える．一方常微分系であるパンルヴェ系は，同様に可積分系というわけではない．しかし解けるものを増やしたいという素朴な動機が可積分系の出発点だったはずである．解ける系との関係がついた系は，やはり解ける（と考えられる）だろうから，あえてパンルヴェ系も可積分系の仲間と考えよう．

3. モノドロミー保存変形とその差分化

パンルヴェ系の起源をモノドロミー保存変形に求めることができる．リーマン球面上の階数2の接続で，確定特異点をもつものを考えよう．つまり，2成分ベクトル値関数 $v(z)$ の方程式

$$\frac{dv}{dz} = L(z)v(z), \quad L(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{L^{(j)}}{z-t_j} \qquad (3)$$

を考える．$L^{(j)}$ が異なる固有値をもつとすれば，方程式の係数が発散する $t_1, \cdots, t_n$（および無限遠）の近傍においては，$(z-t_j)^{L^{(j)}} \times (z$ の正則関数$)$ $(j=1,\cdots,n$ のとき）の形の解が存在する．

ここで $z-t_j$ の行列冪は，$\log(z-t_j)$ と行列の指数関数 $\exp A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$ を用いて定まるが，ちょうど $z=e^x$ の冪 $z^a = e^{ax}$ が $x \mapsto x+2\pi i$ で e^a 倍ずれるように，各 t_j を回るごとにずれ（モノドロミー）が生じる．すなわち，$Y(z)$ を (3) の基本解行列とし $C_j \in \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{t_j\}, b)$ を t_j を回る道とすれば（b は一つの基点），Y の C_j に沿った解析接続 $(C_{j*}Y)(z)$ と $Y(z)$ のズレとして，次の**モノドロミー行列** M_j が定まる：

$$C_{j*}(Y)(z) = Y(z)M_j.$$

M_j は z については定数で，$e^{2\pi i L^{(j)}}$ と共役であり，基本群の関係式 $M_1 \cdots M_n M_\infty = 1$ を満たす．

事実． $\{M_j\}$ は，すべての j について次を満たせば $\{t_j\}$ に関し定数である（モノドロミー保存）：

$$\frac{\partial Y}{\partial t_j} Y^{-1} = -\frac{L^{(j)}}{z-t_j} (=: B_j \text{とおく}). \qquad (4)$$

このとき (3), (4) の両立条件として，次の **Schlesinger 方程式**（ラックス形式）が成り立つ：

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - L(z,\{t_i\}), \frac{\partial}{\partial t_j} - B_j(z,\{t_i\})\right] = 0 \qquad (5)$$

$(j=1,\cdots,n)$．これより $n+1=4$ 点のときに，$(t_1,t_2,t_3,\infty) = (0,1,t,\infty)$ とし，変形の変数 t の関数である従属変数 $y(t)$ として $L^{(3)}$ の非対角成分に注目し，$\mathrm{P_{VI}}$ が得られる（R. Fuchs）．

神保と坂井は以上を次のように差分化した．

$$\begin{aligned} &\frac{Y(qz)-Y(z)}{qz-z} = L(z)Y(z) \\ &\left(L(z) = \frac{L^{(1)}}{z} + \frac{L^{(2)}}{z-1} + \frac{L^{(3)}}{z-t}\right) \\ \Longleftrightarrow\ & Y(qz) = \{1+(q-1)zL(z)\}Y(z) \end{aligned} \qquad (6)$$

を考える．$(z-1)(z-t) = \gamma(qz)\gamma(z)^{-1}$ を満たす関数 γ で $\mathcal{Y} = \gamma Y$ とおけば $\mathcal{Y}(qz) = \mathcal{L}(z)\mathcal{Y}(z)$,

$$\mathcal{L}(z) := (z-1)(z-t)\{1+(q-1)zL(z)\} \quad (7)$$

は z の多項式となる．もとの方程式の特異性は $\det \mathcal{L}(z)$ の零点として捉えられる．確定特異点型と同様の解を考える自然な場所は，差分になると $z=0,\infty$ のみになる：それらを $\mathcal{Y}_0(z) = z^{\mathcal{L}(0)} \times (z$ のベキ級数$)$，および同様に $\mathcal{Y}_\infty(z)$（$z=\infty$ における解）としよう．これらの解をつなぐ

$$\mathcal{M}(z) := \mathcal{Y}_0(z)^{-1}\mathcal{Y}_\infty(z) \qquad (8)$$

がモノドロミー行列の役割をする．$\mathcal{Y}(z,qt) = \mathcal{B}(z,t)\mathcal{Y}(z,t)$ を満たす $\mathcal{B}$ が存在すれば $\mathcal{M}$ は t について定数となる．(5) の差分版は

$$\mathcal{L}(z,qt)\mathcal{B}(z,t) = \mathcal{B}(qz,t)\mathcal{L}(z,t) \qquad (9)$$

となる．適当な成分に注目し $q\mathrm{P_{VI}}$ が導かれる．

4. 量子化と量子差分化

(9) の量子化（非可換化）を与えたい．なぜ量子化（非可換化）したいかと言えば，もともとの方程式が（非自励とはいえ）ハミルトン系であり，そこにポアソン括弧があるからである．$\mathrm{P_{VI}}$ は，次のハミルトニアンで定まる正準方程式と同値である：

$$H = \frac{y(y-1)(y-t)}{t(t-1)}\left[x^2 - \left\{\frac{\alpha_0 - 1}{y-t}\right.\right.$$

$$+\frac{\alpha_3}{y-1}+\frac{\alpha_4}{y}\Big\}x+\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2}{y(y-1)}\Big].$$

ここで $\{x,y\}=1$. この量子化は名古屋創によって与えられた (2009). $[x,y]=1$ とし

$$\begin{aligned}\hat{H}=&\frac{1}{6t(t-1)}[yx(y-1)x(y-t)\\&+(y-t)x(y-t)zy+(y-t)xyx(y-1)\\&+(y-t)x(y-1)xy+(y-1)xyx(y-t)\\&+yx(y-t)x(y-1)]\\&+\frac{1}{2t(t-1)}[(\alpha_0-1)\{yx(y-1)+(y-1)xy\}\\&+\alpha_4\{(y-1)x(y-t)+(y-t)x(y-1)\}\\&+\alpha_3\{yx(y-t)+(y-t)xy\}]\\&+\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_2}{t(t-1)}(y-t)\end{aligned}$$

がそのハミルトニアンである. 量子版の方程式

$$\widehat{\mathrm{P_{VI}}}:\ \frac{dy}{dt}=\big[y,\hat{H}\big]+\frac{\partial\hat{H}}{\partial t},\quad \frac{dx}{dt}=\big[x,\hat{H}\big]+\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}$$

は $\mathrm{P_{VI}}$ と同じ $D_4^{(1)}$ 型対称性をもつ.

これは膨大な試行錯誤で求められたものだが, 以下では差分版の量子化は量子群から天下りにすべて構成できることを述べたい.

出発点はラックス形式 (9) である. 実は可解格子模型の研究の初期からソリトン系の差分化や量子化という動機があった. 例えばサインゴルドン方程式の量子差分化について, イゼルギンとコレピンの量子版ラックス行列がスクリャーニンにより掘り下げられ, 量子群の発見へ至る一つの道となった. この道を逆に辿って, 量子群の理論から量子差分のソリトン系を構成したのはファデェエフらである. 大雑把には, それを空間方向に周期簡約し常微分化すると量子差分パンルヴェ方程式が出てくるのだが, 特異点を動かす仕組みとして彼らの構成を非自励的に拡張する必要がある.

そこで出発点の接続形式あるいはラックス行列の量子差分化であるが, $A_1^{(1)}$ 型という, 最も簡単なアフィン量子群を使う. $0<|q|<1$ とし, 複号同順で $U_q^{\pm}=U_q^{\pm}(A_1^{(1)})$ をアフィン量子群の上/下三角部分とする：生成元を $e_i^{\pm}$ および h_i $(i=0,1),d$ と書こう. d はいわゆる scaling element, $c=h_0+h_1$ が標準的中心元である.

複素数 $c^{\pm}\in\mathbb{C}$ をとり, $V^{\pm}:=\mathbb{C}[e^{\pm\alpha_0},e^{\pm\alpha_1}]$ の上に $U_q^{\pm}$ の表現 $\rho^{\pm}$ を次のように定める：

$$e_i^{\pm}\mapsto-(q-q^{-1})e^{\pm\alpha_i}=:E_i^{\pm},$$

$$h_i\mapsto h_i\ (i=0,1),\ c\mapsto c^{\pm}\in\mathbb{C}. \qquad (10)$$

ただし h_i の作用は $[h_i,e^{\pm\alpha_j}]=\pm\alpha_j(h_i)e^{\pm\alpha_j}$ なる導分である. $k=q^{h_1}$, $\Delta^{\pm}:=E_0^{\pm}E_1^{\pm}$ とすれば

$$\begin{aligned}&kE_1^{\pm}k^{-1}=q^{\pm2}E_1^{\pm},\ kE_0^{\pm}k^{-1}=q^{\mp2}E_0^{\pm},\\&q^d\Delta^{\pm}q^{-d}=q^{\pm1}\Delta^{\pm}.\end{aligned} \qquad (11)$$

さて $\mathcal{R}\in U_q^{+}\otimes U_q^{-}$ (の無限和) を $U_q(A_1^{(1)})$ の普遍 R 行列, $\Box_z$ を 2 次元の evaluation 表現とする.

$$\begin{aligned}L_z^{+}(\Delta^{+})&:=(\rho^{+}\otimes\Box_z)(\mathcal{R})=\frac{(q^4z^{-1}\Delta^{+},q^4)_\infty}{(q^2z^{-1}\Delta^{+},q^4)_\infty}\\&\times\begin{pmatrix}1&\frac{1}{z}E_0^{+}\\E_1^{+}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k^{-\frac{1}{2}}&0\\0&k^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}q^{-c^{+}d},\\L_z^{-}(\Delta^{-})&:=(\Box_z\otimes\rho^{-})(\mathcal{R})=\frac{(q^4z\Delta^{-},q^4)_\infty}{(q^2z\Delta^{-},q^4)_\infty}\\&\times\begin{pmatrix}1&E_1^{-}\\zE_0^{-}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k^{-\frac{1}{2}}&0\\0&k^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}q^{-c^{-}d}.\end{aligned} \qquad (12)$$

ただし, $(x,Q)_\infty=\prod_{n=0}^{\infty}(1-xQ^n)$ が, ラックス行列 (6), (7) の量子差分版である (さらに (18) のように積をとる). ファデェエフが扱ったのは $c^{\pm}=0$, $q^{-c^{\pm}d}=id$ のときであった.

行列 $L_z^{\pm}$ に掛かっている無限積は, $\mathcal{R}$ の虚ルート因子からの寄与で, スカラー倍に過ぎず意味があまりなさそうに見えるが, $q\to1$ では (L_z^{+} の場合)

$$\lim_{q\to1}\left(\frac{(q^4z^{-1}\Delta^{+},q^4)_\infty}{(q^2z^{-1}\Delta^{+},q^4)_\infty}\right)^{-2}=1-\frac{\Delta^{+}}{z} \qquad (13)$$

は $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{z}E_0^{+}\\E_1^{+}&1\end{pmatrix}$ の行列式に等しく, $L_z^{\pm}$ は (非可換だが)「行列式 1」的である. 無限積から生じる, $\Delta^{\pm}$ で決まる無限個の極は (11) により「時間とともに動く」(後出の (20) 式を参照). $L_z^{\pm}$ は, 接続行列の量子化として望ましい性質をもっている.

さて $R(\Delta^{+},\Delta^{-}):=(\rho^{+}\otimes\rho^{-})(\mathcal{R})$ とおくと

$$\begin{aligned}&R(\Delta^{+},\Delta^{-})=(qE_1^{+}\otimes E_1^{-},q^2)_\infty^{-1}\\&\times(q^2\Delta^{+}\otimes\Delta^{-},q^4)_\infty^{-1}(qE_0^{+}\otimes E_0^{-},q^2)_\infty^{-1}q^{-T},\end{aligned} \qquad (14)$$

ただし $T:=\frac{1}{2}h_1\otimes h_1+c^{+}\otimes d+d\otimes c^{-}$ である. $\mathcal{R}$ が満たすヤン・バクスター方程式 (2) より,

$$\begin{aligned}&L_z^{+}(\Delta^{+})R(\Delta^{+},\Delta^{-})L_z^{-}(\Delta^{-})\\&=L_z^{-}(\Delta^{-})R(\Delta^{+},\Delta^{-})L_z^{+}(\Delta^{+})\end{aligned} \qquad (15)$$

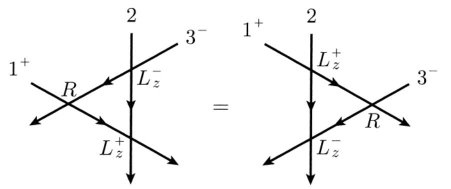


図 1　ヤン・バクスター方程式 (15).

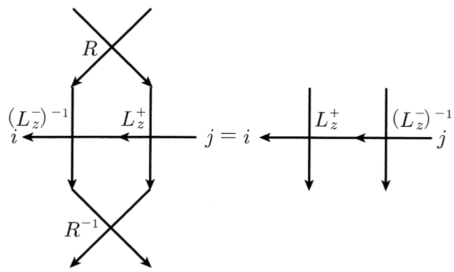


図 2　“Exchange dynamics” (16).

である（図 1）．(15) を書きなおせば（図 2）：

$$
\begin{aligned}
&R^{-1}\left[(L_z^-)^{-1}L_z^+\right]_{ij}R\\
&=\left[L_z^+(L_z^-)^{-1}\right]_{ij}\in(\rho^+\otimes\rho^-)(U_q^+\otimes U_q^-). \quad (16)
\end{aligned}
$$

R による共役変換で，$(L_z^-)^{-1}L_z^+$ の各行列成分が $L_z^+(L_z^-)^{-1}$ のそれに一斉に化ける．これは実はアフィン戸田方程式の離散化（あるいは，LR アルゴリズムのアフィン版）を与えている．

5. 格子系とその周期簡約

格子模型的にさらに自由度を増やす．前節の表現 $V^\pm$ を，1 次元格子の整数点に（偶奇を $\pm$ に合わせて）置きテンソル積を取ることで，1 次元格子系が得られる．$\mathbb{Z}$ の偶数点，奇数点を，n^+, n^- と（$2n, 2n+1$ ではなく）表し，各点に

$$
\begin{aligned}
&\rho^\pm=\rho^{n^\pm}:U_q^\pm\to\mathrm{End}(V^{n^\pm}),\\
&V^{n^\pm}\simeq\mathbb{C}[e^{\pm\alpha_0},e^{\pm\alpha_1}]
\end{aligned}
$$

と表現を置く．パラメータ $c^{n^\pm}:=\rho^{n^\pm}(c)$, $\Delta^{n^\pm}:=\rho^{n^\pm}(\Delta^\pm)$ は $n^\pm$ ごとに違って良い．

$$
\mathcal{V}:=\otimes_{n,\pm}V^{n^\pm},\ \mathcal{A}:=\otimes'_{n,\pm}\mathrm{End}(V^{n^\pm})
$$

とすれば（$\otimes'$ は，1 に関する制限テンソル積），$\mathcal{A}$ が「観測可能量」の代数であり，$V^{n^\pm}$ に作用する局所的作用素（$\mathrm{End}(V^{n^\pm})$ の元）で生成される．

簡単のため $\rho^{m^+}\otimes\rho^{n^-}(\mathcal{R})$ を R^{m^+,n^-} と書き，1 ステップの時間発展を与えるハミルトニアンを

$$
\mathcal{H}_0:=\prod_n R^{n^+n^-},\quad \mathcal{H}_1:=\prod_n R^{(n+1)^+n^-}
$$

の積 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_0\mathcal{H}_1$ とする．ここで $\mathcal{H}_0,\mathcal{H}_1$ の因子はそれぞれ互いに可換であることに注意しよう．

次の変換が我々の格子系の時間発展である．

$$
\mathcal{T}:=Ad(\mathcal{H}^{-1}):\mathcal{O}\mapsto\mathcal{H}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{H},\quad \mathcal{O}\in\mathcal{A}. \quad (17)
$$

局所ラックス行列 (12) を次々と掛けて

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_z(1^-1^+2^-2^+)\\
&:=L_z^-(\Delta^{1^-})^{-1}L_z^+(\Delta^{1^+})L_z^-(\Delta^{2^-})^{-1}L_z^+(\Delta^{2^+}) \quad (18)
\end{aligned}
$$

（4 点のとき）のように書こう．すると時間発展 $\mathcal{T}$ でこの積の順番が入れ替わっていく（図 3）．

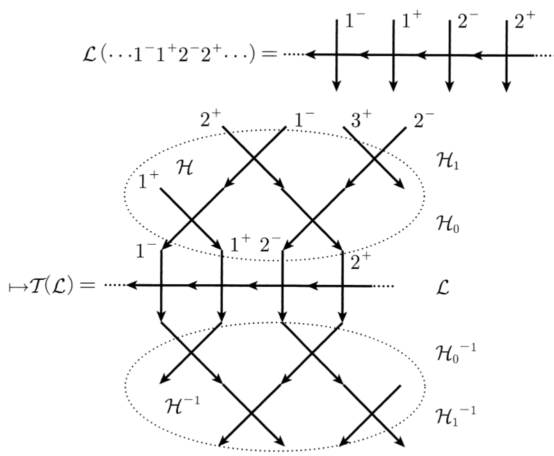


図 3　時間発展 $\mathcal{T}$ (17).

変換 $\mathcal{T}$ を具体的に表そう．w_i^{mn} を

$$
\begin{cases}
(E_i^+)^{m^+}\otimes(E_i^-)^{n^-} & (m-n:\text{偶}),\\
(E_i^+k_i^{-1})^{m^+}\otimes(k_iE_i^-)^{n^-} & (m-n:\text{奇})
\end{cases}
$$

とおき，$\Delta^{mn}:=w_0^{mn}w_1^{mn}$ とおけば

定理 1　$\mathcal{T}$ は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(w_0^{11})w_0^{20}&=\frac{w_0^{10}-q\Delta^{10}}{w_0^{10}-q}\cdot\frac{w_0^{21}-q\Delta^{21}}{w_0^{21}-q},\\
\mathcal{T}^{-1}(w_0^{21})w_0^{12}&=\frac{qw_0^{11}-\Delta^{11}}{qw_0^{11}-1}\cdot\frac{qw_0^{22}-\Delta^{22}}{qw_0^{22}-1}.
\end{aligned} \quad (19)
$$

$w_0^{m,m}$, $w_0^{m+1,m}$ なども番号を適宜ずらして読めばよい．(19) の導出だが，例えば X が $\mathcal{H}$ の無限積の因子の変数（(14) 参照），Y が w_i^{mn} のとき，可換でな

ければ $YXY^{-1} = q^2X$ などとなり，

$$Y(X, q^2)_\infty = (YXY^{-1}, q^2)_\infty Y = (q^2X, q^2)_\infty Y,$$

$$(X, q^2)_\infty^{-1} Y(X, q^2)_\infty = \frac{(q^2X, q^2)_\infty}{(X, q^2)_\infty} Y = (1 - X)^{-1} Y$$

のように分母子の因子が生じる．なお (11) より

$$\mathcal{T}(\Delta^{m^\pm}) = q^{\mp c^{m^\pm}} \Delta^{m^\pm} \tag{20}$$

であり，これは $\mathcal{T}$ で特異点が動いていく式になる．

さて，$c^{m^\pm} = c^{(m+2)^\pm}$ のとき，$\mathcal{T}$ は

$$w_i^{mn} = w_i^{m+2,n} = w_i^{m,n+2} \tag{21}$$

という周期条件を保つことがわかる．(19) は $q\mathrm{P_{VI}}$ と似ているが，実際周期条件の下に

定理 2（量子差分 VI 型方程式 $\widehat{q\mathrm{P_{VI}}}$）

$$-qF = \sqrt[4]{\frac{w_0^{11} w_0^{22}}{w_1^{22} w_1^{11}}}, \quad -qG = \sqrt[4]{\frac{w_0^{10} w_0^{21}}{w_1^{21} w_1^{10}}},$$

$$a_0^4 = \frac{w_0^{21}}{w_0^{10}}, \quad a_1^4 = \frac{w_1^{21}}{w_1^{10}}, \quad a_2^4 = \frac{1}{\Delta^{21}},$$

$$a_3^4 = \Delta^{11}, \quad a_4^4 = \frac{w_1^{22}}{w_1^{11}}, \quad a_5^4 = \frac{w_0^{22}}{w_0^{11}}. \tag{22}$$

とすれば $FG = q^2GF$ であり，次が成り立つ．

$$\mathcal{T}(F)F = \frac{p^2}{q^2t^2} \cdot \frac{G + p^{-1}a_1^{-2}t}{G + pa_0^{-2}t^{-1}} \cdot \frac{G + p^{-1}a_1^2 t}{G + pa_0^2 t^{-1}},$$

$$\mathcal{T}^{-1}(G)G = \frac{1}{q^2t^2} \cdot \frac{q^2F + a_4^2 t}{q^2F + a_5^2 t^{-1}} \cdot \frac{q^2F + a_4^{-2} t}{q^2F + a_5^{-2} t^{-1}}.$$

これは $q\mathrm{P_{VI}}$ の非可換化を与えている．a_i $(i = 0, 1, 4, 5)$ と $p = a_0 a_1 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5$ たちは変換に関して定数であり（容易），$t = (a_3^2 a_4 a_5)^4 = \Delta^{00}\Delta^{11}$ が時間の役割を果たす：(20) より

$$\mathcal{T}(t) = q^{2c} t, \ c = c^{0^-} + c^{1^-} - c^{0^+} - c^{1^+}.$$

最後に，(9) の量子化であるが

定理 3 $\mathcal{B}(z) := \mathcal{H}_0 \mathcal{L}_z(2^-)\mathcal{H}_1$ とおけば

$$\mathcal{L}(1^- 1^+ 2^- 2^+)\mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(z)\mathcal{L}(1^+ 2^- 2^+ 1^-).$$

これも実に量子群的に，絵を描いて判る（図 4）．

ラックス作用素を行列部分と差分作用素部分に分けて $\mathcal{L}(1^- 1^+ 2^- 2^+) = q^D L(1^- 1^+ 2^- 2^+)$ と書こう：$D = \sum_{i=1,2;\pm} \mp c^{i^\pm} d = cd$．定理 3 は

$$L(1^- 1^+ 2^- 2^+)\mathcal{B}(z) = \mathcal{B}(zq^{-c})\mathcal{T}(L(1^- 1^+ 2^- 2^+))$$

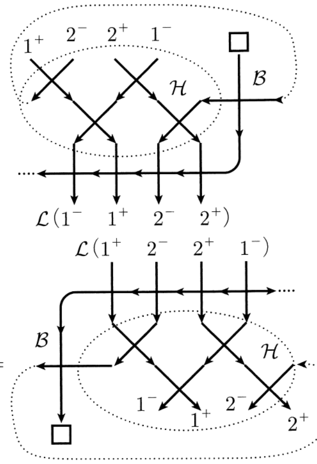


図 4 量子離散 Schlesinger 方程式（定理 3）．

と，より (9) に近く書ける．周期条件 (21) は任意偶数にでき，定理 3 はより一般に，時間発展 $\mathcal{T}$ と

$$\mathcal{Y} = \mathcal{L}\mathcal{Y}, \ \mathcal{L} = \mathcal{L}(1^- 1^+ \cdots n^- n^+) \tag{23}$$

すなわち，$q^{-D}\mathcal{Y}(z) = \mathcal{Y}(q^{-c}z) = L(z)\mathcal{Y}(z)$ との両立条件として拡張できる（ガルニエ系の量子差分化）．形式的基本解

$$\mathcal{Y}_\infty(z) := L(z)L(zq^c)L(zq^{2c}) \cdots,$$

$$\mathcal{Y}_0(z) := L(zq^{-c})^{-1} L(zq^{-2c})^{-1} \cdots$$

を使えば，(8) の量子版は次のように書ける．

$$\mathcal{Y}_0^{-1}\mathcal{Y}_\infty = \cdots L(zq^{-c})L(z)L(zq^c) \cdots.$$

これは格子模型では転送行列に他ならず，関係を考える上で大変興味深い．良い離散系の背景には幾何があり，良い圏論的構造と密接に関係していることを示唆していると思う．

パンルヴェ方程式のアフィンワイル群対称性や，モジュライ的観点からの意味も改めて考えるべきだが，紙面も尽きた．またの機会としよう．

参考文献

本稿では多方面の話題で背景についてかなり端折っている．理由はページ数だけの問題ではないけれど，日本語では基本的著作に恵まれている．

岡本和夫『パンルヴェ方程式』岩波書店，

神保道夫『ホロノミック量子場』岩波書店，同『量子群とヤン・バクスター方程式』丸善出版．

また，詳細や文献は下記を参照していただきたい．

K. Hasegawa, arXiv:1210.0915, to appear in *Lett. Math. Phys.*

（はせがわ・こうじ，東北大学大学院理学研究科）

川村　嘉春

グルッペン・ペストに怯えながら

巻頭言で述べたように，物理法則とその背後にある概念・原理を探求する上で「群論の抽象性」が魔法の杖のような働きをする．実際，量子力学の構築期に研究者の間で群論的な手法が大流行し，「グルッペン・ペスト（Gruppen Pest，群論のペスト）」という造語が生まれた．この造語を初めて目にしたとき，その裏の意味に怯えを抱いた．「群論を学ぶと群論の調和のとれた美しさと威力の凄さにとり憑かれて物理を見失ってしまうのではないだろうか.」という危惧である．ここでは「グルッペン・ペスト」を主にこのような意味で用いることにする．

私自身，教養課程（大学の1～2年生）の頃（今から30年ほど前），この病にかからないようになるべく薄い本を図書館で借りた覚えがある（が，どの本だったか定かではない）．よく残っている記憶は，山内恭彦・杉浦光夫共著『連続群論入門』（培風館，1960）を購入し，読んだことである．証明が完結でコンパクトにまとまっていて，物理を学ぼうとする学生にとって最適であったと思う．

「量子力学」ではユニタリー変換が成す群であるユニタリー群，「特殊相対性理論」ではローレンツ変換が成す群であるローレンツ群が登場するが，テキストに記載された説明を通して，「群論」の詳細を知らなくても物理的な概念を理解することは可能である．もちろん，群論の知識があるとより味わい深いものになるのも確かである．専門的な分野に行くと「群論」の知識が必要不可欠になる場合がある．

例えば，「場の量子論」や「素粒子物理学」が扱う物理系は近似的なものも含めて対称性（変換の下での不変性）の宝庫である．実際，素粒子の分類や相互作用の決定，ゲージ理論の構成において，「リー群」と呼ばれる連続群が魔法の国のような世界へと誘う．

私が学生だった頃，「リー群」および「リー代数」に関する物理向けの著書として，M. Hamermesh 著『Group Theory and its application to physical problems』（Addison-Wesley, 1962）や R. Gilmore 著『Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications』（John-Wiley & Sons, 1974）が知られていた．ただし，私の好みには合わなかったようで，実際に読んだ本は D.B. Lichtenberg 著『Unitary Symmetry and Elementary Particles』（Academic Press, 1978）と H. Georgi 著『Lie Algebras in Particle Physics』（Perseus Books, 1982）である．後者に関しては，ジョージァイ著，九後汰一郎訳『物理学におけるリー代数（原著第2版）』（吉岡書店，2010）という形で日本語訳が出版されている．

選んだ2冊はいずれも物理に関する内容が比較的多く含まれ，かつ簡潔に記載されている．良く言うと知恵（悪く言うと怯え）が作用したのだと思う．

その後，研究において，R. Slansky 著『Group theory for unified model building』，*Physics Report* **79**,(1981) 1–128 が大いに役に立っている．「リー群」に関するテーブルが豊富に含まれ，「これだけあれば十分.」と思いきや，実際には必要なものを自分で生み出すことになる場合がある．そんなとき「群論は手作り感に溢れ，それを楽しめるのがよい.」という気分に浸ろうとしている無防備な自分がいる．

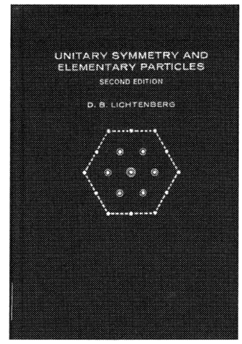
現在では物理向けの群論の和書がいくつも刊行されている．入門書としては，小野嘉之著『物理で「群」とはこんなもの』（共立出版，1995），小野寺嘉孝著『物性物理/物性化学のための群論入門』（裳華房，1996）などがあり，より進んだものとしては，佐藤光著『物理数学特論 群と物理』（丸善出版，1992），吉川圭二著『群と表現』（岩波書店，1996），窪田高弘著『物理のためのリー群とリー代数』（サイエンス社，2008），江沢洋・島和久共著『群と表現』（岩波書店，2009）などがある．

「群論」に限らず，「微分幾何学」や「位相幾何学」に関する物理向けの良書が存在し，むやみに怯えることなく，用途に合わせて数学的な知識を充実させることができる時代である．「予防接種する機会を利用しない手はないのでは,」と少し羨ましく思う．

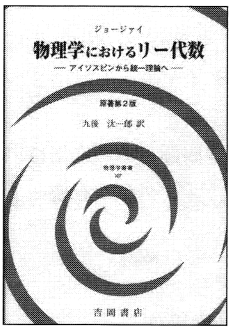
（かわむら・よしはる，信州大学理学部）

Unitary Symmetry and Elementary Particles (Second Edition)

D.B. Lichtenberg 著，289 頁，Academic Press，1978 年



多数のハドロン（バリオンとメソン）の生成・発見，ハドロンの分類，クォーク模型の提案，チャームクォークからなる J/ψ 粒子の発見という怒涛の時代とそれに付随した第 2 の群論の流行を背景として書かれた本である．この一冊でハドロンの法則，分類，クォーク模型の基本が理解できる（図書室で見つけて，これなら大丈夫と思った記憶がある）．



物理学におけるリー代数（原著第 2 版）

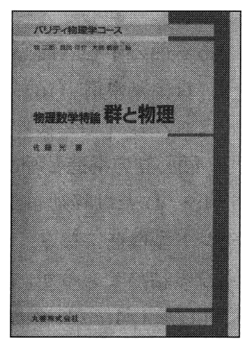
アイソスピンから統一理論へ

H. Georgi 著，九後汰一郎訳，A5 判，330 頁，本体 4600 円，吉岡書店，2010 年

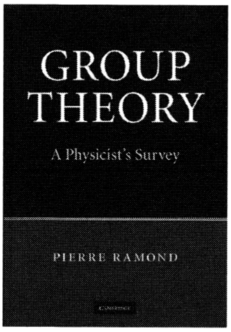
著者は $SU(5)$ に基づく大統一理論（強い力，電磁気力，弱い力を統一的に記述するゲージ場の量子論）を S. グラショウと共に最初に提唱した物理学者である．第 1 版に比べると内容が濃くなり，物理学に関する数々の実例を交えた解説を通して，さらに実践的な知識が習得できる．素粒子の標準理論や大統一理論の群論的な側面を理解するのに適している．

物理数学特論 群と物理

佐藤光著，A5 判，266 頁，丸善出版，1992 年



「親しみやすい.」というのが私の第一印象である．数学的な厳密性よりも実用性を重視し，具体例に触れながら慣れ親しんでいくという「物理流」に即したもので，数学的な基礎知識から物理的な応用まで多彩な題材を通して群論を習得することができる．自主学習やゼミのテキストとして，物理を志す学生にお勧めしたい本である．



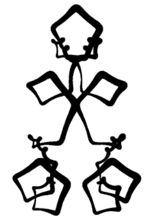
Group Theory

A Physicist's Survey

P. Ramond 著，320 頁，Cambridge University Press，2010 年

著者はボース粒子とフェルミ粒子を記述する弦理論（超弦理論の原型）を最初に構築した物理学者の 1 人である．群論と素粒子物理学への応用に関する非常に多岐に渡る話題が簡潔に紹介された味わい深い良書である．具体的には，有限群とその表現，リー群とリー代数，さらに進んだ話題（カッツ・ムーディ代数，超対称性），標準模型の対称性などが扱われている．

群と結晶



播 磨　尚 朝

1. はじめに

物性物理では，アボガドロ数（約 6×10^{23}）個の原子核や電子を取り扱う．その中でも結晶は特別な存在である．結晶においては，原子核の熱平衡位置が規則的な配列をしている．そのおかげで，結晶ではアボガドロ数個の膨大な電子の波動関数を取り扱うことが可能となっている．規則的な配列は，ある原子の集合（**単位構造**）を代表する**格子点**と呼ばれる点と，その格子点の**並進対称操作**で特徴付けられる．

最初に，**面心立方格子**と呼ばれる立方体の頂点と 6 つある面の中心（面心）に格子点を持つ格子を考えよう．貴金属の銅 (Cu)，銀 (Ag)，金 (Au)，あるいはアルミニウム（Al）などは原子が各格子点に位置しており，**面心立方構造**と呼ばれる．その原子位置から (1/4, 1/4, 1/4) だけ移動した位置に同じ原子を置くと**ダイヤモンド型構造**になる．ダイヤモンドは炭素（C）のみからなる結晶であるが，最近接の原子（例えば，(0, 0, 0) と (1/4, 1/4, 1/4) の原子）は並進対称操作で結ばれていないため（$2(1/4,1/4,1/4)=(1/2,1/2,1/2)$ は並進対称操作ではない），炭素の原子対を面心立方格子に並べた構造になっている．

面心立方格子の格子点にナトリウム（Na）を，(1/2, 0, 0) に塩素（Cl）を置いた場合は，**塩化ナトリウム型**（NaCl 型）**構造**となる．また，面心立方格子の格子点に亜鉛（Zn）を，(1/4, 1/4, 1/4) に硫黄（S）を置いた場合は，**閃亜鉛鉱型**（ジンクブレンド型）**構造**となる．これらはすべて面心立方格子であるが，単位構造が異なるために結晶構造は異なっている．その様子を図 1 に示す．ここに示したすべての原子は，同じ並進対称性を持っているが，原子位置での点対称性は異なっている．銅と Na や Cl は同じ対称性を有しているが，ダイヤモンドの C や ZnS の Zn や S には反転対称性がない．さらに，ダイヤモンドでは 2 つの炭素の中点に反転対称中心がある．

最初に文献をあげておく．空間群とその応用はいくつも教科書がある[1~5]．実際にプログラムを使って学習できる本もある[6]．

2. 並進対称操作と点対称操作

結晶では構成原子が並進操作によって不変に保たれる．並進対称操作で結ばれていない原子の組を代表させる点を格子点と呼び，原子の組を単位構造と呼ぶ．それぞれの格子点の周囲はすべて同じ環境（単位構造）である．結晶構造は格子点と単位構造から構成される．

3 種類の最小の並進ベクトルを $\boldsymbol{a}_i (i=1,2,3)$，とすると，$n_i (i=1,2,3)$ を任意の整数として並進ベクトルは $\boldsymbol{t_n}=n_1\boldsymbol{a}_1+n_2\boldsymbol{a}_2+n_3\boldsymbol{a}_3$ と書ける．結晶を不変に保つ対称操作は，並進対称操作の他に**回転操作**，**反転操作**，**鏡映操作**などの**点対称操作**と**らせん操作**，**映進操作**がある．最初に点対称操作を整理しておこう．

点対称操作は，恒等操作（E），反転操作（C_i），回転操作（C_n; $2\pi/n$ 回転），鏡映操作（σ），**回映操作**，**回反操作**がある．回映操作は回転操作と鏡映操作の積，回反操作は回転操作と反転操作の積であり，本質的に同じ操作である．回映操作と回反操作は S_n と表記するが，このときの n は回映操作に対するものであり，回転軸に垂直な水平面の鏡映操作を σ_h として，$S_6=\sigma_h C_6$ である．2 回の回映操作（S_2）は反転対称操作（C_i），2 回の回反操作（S_1）は鏡映操作（σ）と一致する．

回転操作（C_n）や回映操作（S_n）の n を，n 回回転軸と呼ぶ．一般に分子などに対しては任意の n の対称操作が許されるが，結晶の場合には n に制限がある．

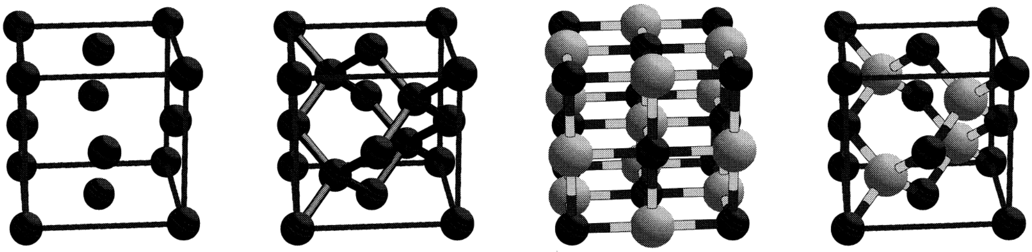


図 1　左から，面心立方構造（銅など），ダイヤモンド型構造（ダイヤモンド），塩化ナトリウム型構造（NaCl），閃亜鉛鉱型構造（ZnS）．これらの構造では並進対称操作が同じであり，すべてが面心立方格子である．

回転操作や回映操作が並進対称操作と両立するためには，すなわち結晶を不変にする対称操作であるためには，$n = 1, 2, 3, 4, 6$ しかない．C_n の回転軸を n 回軸という．一方，S_1, S_2, S_3, S_4, S_6 の場合は $\bar{2}$ 軸，$\bar{1}$ 軸，$\bar{6}$ 軸，$\bar{4}$ 軸，$\bar{3}$ 軸というが，それは S_n の n は回映軸を表し，$\bar{n}$ の n は回反軸を表すからである．

3. 7 つの晶系，14 個のブラベー格子

回転軸や回反軸は 5 種類あるが，この他に，直交する 2 回軸（または $\bar{2}$ 軸）が 3 つある場合と 3 回軸（または $\bar{3}$ 軸）が 4 つある場合の 2 種類を加えて，結晶はその回転操作によって 7 種類に分けられる．**三斜晶**，**単斜晶**，**直方晶**，**正方晶**，**三方晶**，**六方晶**，**立方晶**であり，これを晶系（crystal systems/syngonies）と呼ぶ．7 つの晶系は基本並進ベクトルを用いて 7 種類の格子を形成するが，これらは**単純格子**（P 格子）と呼ばれる（三方晶の**菱面体格子**の場合のみ菱面体（rhombohedral）であることを明示して R 格子と呼ばれる）．晶系を変えずに単純格子に格子点を追加することができて，立方晶には単純格子の体心位置に格子点を追加した**体心格子**（I 格子）と面心位置に格子点を追加した**面心格子**（F 格子）がある．この他に，単斜晶に ac 面の中心に格子点を追加した**側心格子**（B 格子），直方晶には ab 面内に格子点を追加した**底心格子**（C 格子）と体心格子と面心格子，正方晶には体心格子が存在する（側心格子は A 格子もある．A か B か C かは，並進ベクトルと対称操作の組合せで決まる）．全部で 14 種類の格子がありブラベー（Bravais）格子と呼ばれる．

4. ブロッホの定理とブリルアンゾーン

ブロッホの定理は周期的なポテンシャル中の一電子波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ が，次のブロッホ関数で書けることを主張する．

$$\Psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}). \tag{1}$$

ここで，$u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ は $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{t_n}) = u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ を満たす周期関数であり，$\boldsymbol{k}$ は並進操作の**既約表現**のラベルである．系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ はポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ の部分が座標の関数であるが，ポテンシャルは並進対称性を持っているので，並進操作 $\hat{T}_{\boldsymbol{n}}$ と可換である．すなわち，$\mathcal{H}$ と $\hat{T}_{\boldsymbol{n}}$ は同時に対角化できるので，$\hat{T}_{\boldsymbol{n}}$ の固有関数を用いて，$\mathcal{H}$ の固有値を求めることができる．つまり，(1) 式の周期関数 $u_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ をいくつか用意してハミルトニアンの固有値を求めることで，$\boldsymbol{k}$ に属するエネルギー E が求まる．様々な $\boldsymbol{k}$ に対してエネルギーを求めることで，$\boldsymbol{k}$ の関数として $E(\boldsymbol{k})$ を求めることができる．

$\boldsymbol{k}$ は並進群の既約表現のラベルであり，波動関数が並進に応じて変化する位相差を表している．相転移などで長周期構造が出るときには，元の $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}'$ のブロッホ関数の間に新たな行列要素が生まれることになる．

5. 32 個の点群と結晶族

14 個の異なったブラベー格子の格子点に，いろいろな点対称性を持つ単位構造を置いて，結晶を作ることができる．単位構造はその点対称性より点対称操作からなる点群（point group）に分類されるが，その点群は 32 個ある．この群を表すのに，**ステレオ投影図**がしばしば用いられるので，それを図 2 に示す．ステレオ投影図では，対称操作を点で表す，例えば，4（C_4）という点群は，C_4, $C_4^2 = C_2$, C_4^3, $C_4 = E$（E は恒等操作）の 4 つの対称操作があるが，それが表されている．黒点（●）は紙面の手前（北半球）にあり，白

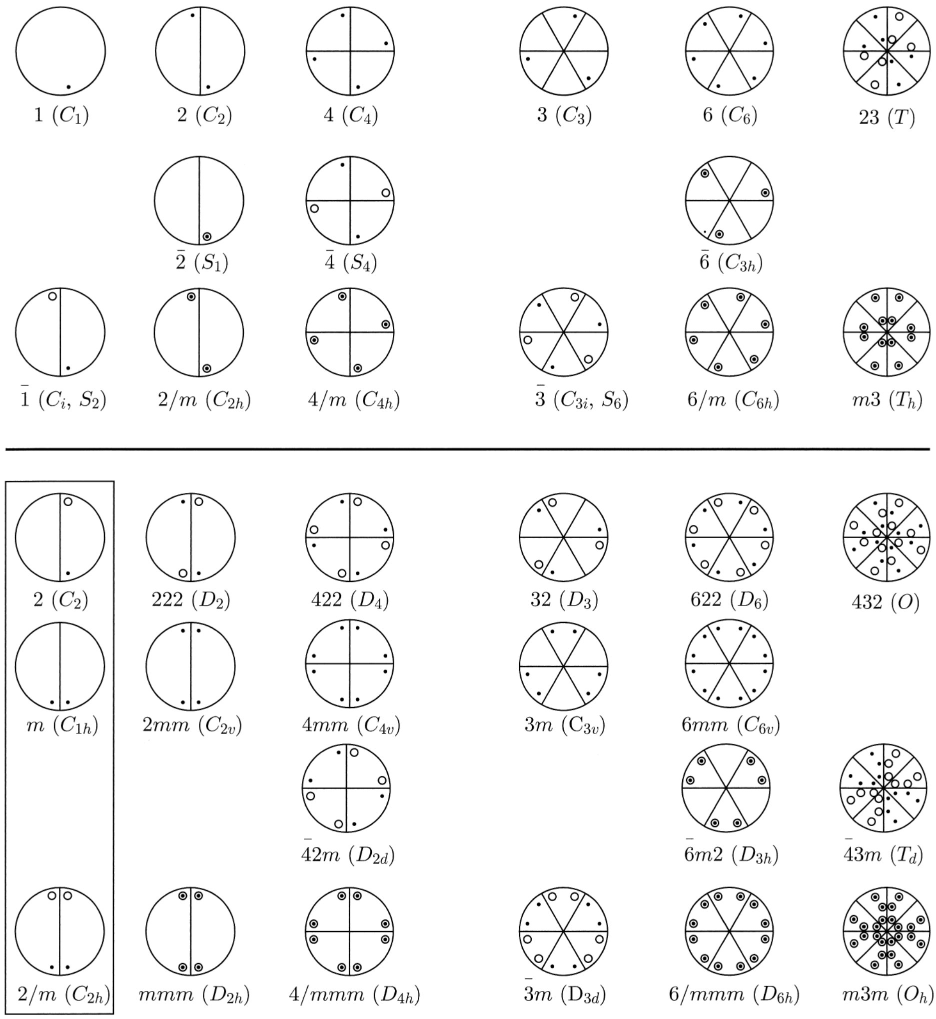


図 2　32 個の点群のステレオ投影図．上下段に別れたそれぞれの第一行は回転操作のみで構成される群であり，国際表記では回転操作を表す数字だけで表される．23（T）は 3 つの 2 回軸と 4 つの 3 回軸がある立方晶の群であり，32（D_3）は 1 つの 3 回軸と 3 つの 2 回軸からなる三方晶の群である．左下の枠内の群は，上段 2 列目と配置が異なる同じ群である．

丸（○）は紙面の向こう（南半球）にあることを表している．点群 $4/m$（C_{4h}）は 4（C_4）の対称操作に紙面での鏡映操作を加えて得られる群である．

ここで表記法に触れる．図 2 の点群の名前は，**国際記号**と括弧内の**シェーンフリース**（Schoenflies）**記号**で書かれている．前者は結晶学で，後者は分子の点群を表すのによく用いられる．国際記号では数字 n は n 回回転軸を m は鏡映面を表し，$\overline{n}$ は n 回回反軸を表す．シェーンフリース記号では，C_n は n 回回転軸を，S_n は n 回回映軸を，D_n は n 回回転軸に垂直な 2 回軸がある場合を表しており，h は主軸に垂直な鏡映面，v は主軸を含む鏡映面，d は対角平面の鏡映を表している．シェーンフリースの表記法の詳細な説明は文献に譲るとして，C_n, D_n, T, O の 4 種類が回転操作のみからなる群であり，図 2 のそれぞれの段の第一行にある 11 個である．この第一行の 11 個の点群は国際記号では数字のみで表される．さらに，第一行の群に反転操作を加えたものが最下行に現れるが，このときには群の位数が倍になっている（群の位数は対称操作の要素の数で，図 2 での●や○の数と等しい）．さらに，それぞれの段の第一行と最下行の間の群は，すべて最下行の群の位数が半分の部分群になっている．

特別な点群についてもふれておこう．

- **エナンショモルフィックな点群**
  反転中心も鏡映面もない，右手系と左手系が混在していない点群．図 2 の上下段の第一行にある 11 個で，国際記号は数字だけで表される．
- **反転中心対称性を持つ点群**
  図 2 の上下段の最下行の 11 個の群である．X 線回折や電子線回折では反転中心が加わる（裏表の区別がつかない）ので，この 11 個の点群のみに分類されることから，ラウエクラス（Laue class）とも呼ばれる．
- **極性を持つ点群**
  反転中心対称性を持たない 21 個の群のうち，図 2 で●のみ現れる 10 個の点群は**極性点群**である（このとき，$\bar{2}$（S_1）は m（C_{1h}）の表記を用いて，極性点群に分類される）．残りの 11 個が極性を持たない点群である．

結晶の周期性を表す格子定数を無限に小さいと考えて良いようなマクロな性質を議論するとき，結晶は連続な弾性体と見なせて，結晶の性質は点対称操作の組合せだけで決まる．例えば，物質が強誘電性を示すには結晶は極性を持つ点群から構成されなければならない．空間群に現れる点対称操作の組合せは 32 個の点群と同じであり，これを結晶族（Crystal class）と呼ぶことがあるが，単純に空間群の点群や結晶の点群と呼ぶこともある．

6. 230 個の空間群

結晶の原子配列を不変に保つ対称操作の集まりは群をなし，空間群と呼ばれる．磁気秩序していない結晶は，230 個の空間群のいずれかに属している．

14 個のブラベー格子で特徴付けられる並進群と 32 個の点群の直積で空間群を作ることができる．このとき，点群は空間群の部分群になっていて，その空間群は**シンモルフィック**（symmorphic）であるという．シンモルフィックな空間群は 73 個ある．残りの 157 個の**ノンシンモルフィック**な空間群は，らせん操作や映進操作を持っている．らせん操作は国際記号では X_p と書かれ，X 回の回転に続いて p/X だけ並進させる操作であり，全部で 11 個ある．映進は鏡映に続いて部分的に並進させる操作のことであるが，部分並進の方向によって 5 種類の映進面があり，国際記号では a, b, c, n, d と表記する．

空間群も点群と同様に，国際記号とシェーンフリース記号が使われる．国際記号はブラベー格子を表す記号（P, A, B, C, I, F, R）の後に点群の対称操作が書かれる．対称操作にらせんや映進がある場合は，それらの記号が用いられる．シェーンフリース記号は結晶族の右上に通し番号を付けただけである．さらに，これらの空間群には 1 から 230 までの通し番号が付けられている（以下，番号が付いたものを#1～#230 と表記する）．

図 1 の結晶構造は，すべて面心立方格子なので，F で始まる．面心立方構造や塩化ナトリウム型構造の空間群は#225 $Fm\bar{3}m$（O_h^5），ダイヤモンド型構造の空間群は#227 $Fd\bar{3}m$（O_h^7），閃亜鉛鉱型構造の空間群は#216 $F\bar{4}3m$（T_d^2）である．国際記号から $Fm\bar{3}m$ は F 格子の立方晶の $m\bar{3}m$（O_h）であることがわかる．$Fd\bar{3}m$ はダイヤモンド映進（d 映進：鏡映の後に $(1/4, 1/4, 1/4)$ の部分並進を行う対称操作）を含むノンシンモルフィックな空間群であるが，結晶族を考えるときには映進 d は鏡映 m とみなし $m\bar{3}m$（O_h）に属する．$F\bar{4}3m$ は反転対称性を持たない結晶族 $\bar{4}3m$（T_d）に属するシンモルフィックな空間群である．

空間群を分類して考えると有用なことがある．前にも述べたように，物質を連続媒質とみなしてマクロな性質を議論するときには結晶族の 32 種類に分類する．ノンシンモルフィックな空間群では並進群のラベル $\boldsymbol{k}$ の関数としてエネルギー $E(\boldsymbol{k})$ を求めるときに，らせんや映進の対称操作が原因で特別な $\boldsymbol{k}$ 点に新しい縮重が加わることがある．反転対称性のない空間群（140 個）では，スピン自由度が特定の $\boldsymbol{k}$ の電子状態の縮退を部分的にとくが，このことは後で触れる．

反転対称性のない 140 個の空間群の中には鏡映を含まない回転操作だけの群がある．国際記号で数字しか現れない 11 個のエナンショモルフィックな結晶族に属する 65 個の空間群でありキラル（chiral）な空間群と呼ばれる．このうちの 22 個の空間群は互いに鏡映操作で移り変わり，エナンショモルフィックな空間群と呼ばれる．図 3 に#180 $P6_222$（D_6^4）と#181 $P6_422$（D_6^5）の構造の例を示す．11 組のエナンショモルフィックな空間群は鏡映操作で互いに移り変わるが，例えば，#3 $P2$（C_2^1）に鏡映操作を作用しても新しい空間群は得られないので，11 組のエナンショモルフィックな空間群を独立な空間群ではないとして，空間群は 219 個であるとする考え方もある．

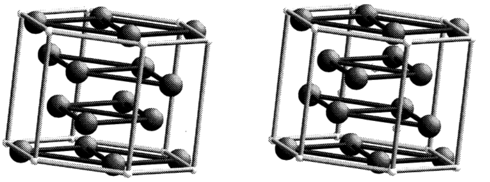


図 3　エナンショモルフィックな空間群 $P6_222$ (左) と $P6_422$ (右) に属する結晶の例. VSi_2 と $TaSi_2$ は $P6_422$ に属し, $NbSi_2$ は $P6_222$ に属することが知られている[7]. 図では, それらの遷移金属原子のみを描いている.

7. $\boldsymbol{k}$ 群の既約表現と電子状態

結晶の電子状態は, $\boldsymbol{k}$ の関数で与えられる. $\boldsymbol{k}$ を不変に保つ操作は空間群から導かれて, それらは群をなす. ノンシンモルフィックな空間群の特別な $\boldsymbol{k}$ 点を除けば, それらの群は 32 個の点群のいずれかになる. 電子状態を考える場合には, 32 個の点群の既約表現などの知見が有用である. そのために, 群論の文献には 32 個の点群の既約表現の指標の表が載っている.

さて, 電子はスピン自由度を持っていて, スピン自由度はスピン軌道相互作用と呼ばれている形で軌道角運動量と結合している. 電子の波動関数の空間回転の対称性を調べるには, 空間回転操作がスピン関数 χ_m にどのように作用するかを知らなくてはならない. スピン関数 α, β の θ の回転による変換 R を

$$[R\alpha, R\beta] = [\alpha, \beta]D^{(1/2)}(R) \qquad (2)$$

のように書く. また, θ の回転を $\theta + 2\pi$ の回転に置きかえたものを $\overline{R}$ と書くと, R と $\overline{R}$ は空間回転で同じ結果を与えるが, $D^{(1/2)}(\overline{R}) = -D^{(1/2)}(R)$ となる. 同じ空間に 2π 回転すると符号が異なる表現行列が存在し, このことからスピン自由度を含んだ場合の群の表現を 2 価表現という. スピン軌道相互作用を考慮した場合の電子状態は, 2 価表現で分類される.

8. 反転対称性の欠如とスピン軌道相互作用

時間反転の対称操作は, $\boldsymbol{k}$ を $-\boldsymbol{k}$ に変えると同時にスピン変数 σ も $-\sigma$ に反転させる. 従って, 時間反転対称性があれば, $E(\boldsymbol{k},\sigma) = E(-\boldsymbol{k},-\sigma)$ となり, 2 つの状態が縮退している. これは, 多粒子系でのクラマースの縮退と呼ばれているものに対応している.

さて, 結晶が反転対称性を持っている場合には, $E(\boldsymbol{k},\sigma) = E(-\boldsymbol{k},\sigma)$ が成り立つので, 空間反転と時間反転の両方の対称性がある場合は, 結果的に $E(\boldsymbol{k},\sigma) = E(\boldsymbol{k},-\sigma)$ が成立しており, すべての $\boldsymbol{k}$ で状態は少なくとも 2 重に縮退している.

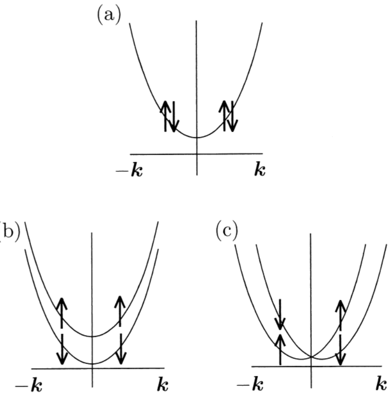


図 4　(a) 空間反転も時間反転もある場合のバンドの縮退. (b) 磁場があるとき (時間反転のみが破れたとき) のバンドの分裂. 空間反転に伴う縮退は残っている. (c) 結晶に空間反転がないときのバンドの分裂. 時間反転はあるのでクラマースの縮退が残っている. 矢印はスピン自由度を便宜的に表しているに過ぎない.

時間反転対称性と空間反転対称性とバンドの縮退の様子を図 4 に示す. 時間反転対称性のみがある場合は, Γ 点 ($\boldsymbol{k} = 0$) での縮退が必ず残るのが特徴である. 実際に電子状態の縮退がとれるかどうかは, $\boldsymbol{k}$ 点の群の 2 価表現が 1 次元になることを示せばよい. バンドの縮退をとく反対称スピン軌道相互作用については, 詳しくは文献 8) を参照していただきたい.

9. 2 次相転移と部分群

相転移には 1 次相転移と 2 次相転移がある. 結晶の 1 次相転移の場合は, 格子定数などの格子パラメータの不連続な変化を伴い, 潜熱の放出や吸収を伴う. これに対して 2 次相転移では変化は緩やかであり転移点では潜熱はなく, 格子パラメータは連続に変化する. ただし, 比熱や熱膨張率などの熱力学量の温度微分は不連続である. このときに, 転移点の上下で結晶の対称性に厳しい関係があることがランダウによって示されている. 詳細は省略するが, そこで述べられていることの 1 つは, 2 次相転移の高温相の空間群を G_0, 低温相の空間群を G とすると, G は G_0 の部分群でなければならないということである. ある空間群の部分群を知

るには，*International Tables for Crystallography*[9] が役に立つ．

International Tables for Crystallography には，空間群ごとに最大部分群（Maximal subgroups（部分群のうち自分自身を含まない最大の位数をもつ群：部分群のうち自分自身との間に部分群が存在しない群）の訳）が次のように整理されて記載されている．

- I: 並進操作を変えない部分群 t–subgroups.
- II: 並進操作を変える部分群 k–subgroups.
  IIa: 単位胞の大きさを変えない．
  IIb: 単位胞を大きくし，もとの群と同型でない．
  IIc: 単位胞を大きくし，もとの群と同型である．

体心正方格子の#139 $I4/mmm$（D_{4h}^{17}）を例にとる．この空間群の最大部分群は，I が 7 つ，IIa が 8 つ，IIb はなし，IIc は 2 つある．I に属する部分群の結晶族は，2 つの D_{2d}, C_{2v}, D_4, C_{4h} と 2 つの D_{2h} である．最初の 5 つは正方晶に属するが，結晶族はラウエクラスではない（図 2 を参照のこと）．2 つの直方晶の D_{2h} は，もともとあった体心への並進と鏡映面の残り方で I 格子と F 格子に別れている．

IIa に属する 8 つの群は，すべて結晶族を変えない代わりに，$(1/2, 1/2, 1/2)$ の純粋な並進操作が取り除かれ，I 格子が P 格子になっている（この場合は基本単位胞は 2 倍になっている）．そのうちの 1 つは単純に $(1/2, 1/2, 1/2)$ の並進が取り除かれているだけであるが，その他の群は $(1/2, 1/2, 1/2)$ の部分並進と組み合わせた，らせん操作や映進操作を含んだノンシンモルフィックな空間群である．IIc に属する 2 つの部分群は c 軸を 3 倍にしたものと，a 軸と b 軸を共に 3 倍した単位胞をとった同じ空間群（# 139）である．

高温で#139 $I4/mmm$（D_{4h}^{17}）の結晶が時間反転対称性を破らずに（磁気的でない）2 次相転移をした場合は，低温での結晶の空間群の候補はまず上記の部分群となる（さらにその下の部分群まで落ちていることもある）．URu_2Si_2 の高温相は#139 に属するが，約 17 K で比熱により観測されている 2 次相転移より低温での相の空間群はこれまでの研究では決定することができずに，隠れた秩序相と呼ばれている．この秩序相の空間群に関する群論的な考察が行なわれている[10]．

いずれの場合でも，2 次相転移で部分群に落ちるのであるから，対称操作の数は減っている．そのとき，特定の原子に注目すると，1) 原子位置での局所対称性が変わらずに等価である原子を結ぶ対称操作が失われて複数の原子位置が非等価になるか，2) 原子位置での局所対称性が落ちて結晶学的に等価である原子の数は保たれるか，3) 等価な原子数も減り局所対称性も落ちる，のいずれかである．

相転移が時間反転対称性の破れも伴う場合でも，時間反転対称性を加えて部分群を探すという操作は同様に行うことができる．しかし，時間反転対称性を含めた磁性群で部分群を探す一般論は知られていないようである．

参考文献

1) 犬井鉄郎，田辺行人，小野寺嘉孝：『応用群論—群表現と物理学』，裳華房 (1976).
2) G. バーンズ著，中村輝太郎・澤田昭勝共訳：『物性物理学のための群論入門』，培風館 (1983).
3) 今野豊彦：『物質の対称性と群論』，共立出版 (2001).
4) C.J. Bradley, A.P. Cracknell: The Mathematical Theory of Symmetry in Solids—Representation theory for point groups and space groups, Oxford University Press (1972); reprints (2010).
5) M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, A. Jorio: Group Theory- Application to the Physics of Condensed Matter, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).
6) 柳瀬章：『空間群のプログラム—TSPACE』，裳華房 (1995).
7) H. Sakamoto, A. Fujii, K. Tanaka, and H. Inui: *Act. Mater.* **53**, 41 (2005).
8) 柳瀬陽一，播磨尚朝：「スピン軌道相互作用と結晶中の電子状態」固体物理，アグネ技術センターに連載，第 46 巻，229 (2011); 第 46 巻，283 (2011); 第 47 巻，101 (2012).
9) *International Tables for Crystallography*, Volume A, *Space-Group Symmetry*, Edited by T. Hahn, Corrected reprint of the fifth edition, Springer-Verlag, Berlin (2005).
10) H. Harima, K. Miyake, J. Flouquet: *J. Phys. Soc. Jpn.* **79**, 033705 (2010).

（はりま・ひさとも，神戸大学大学院理学研究科）

群と場の量子論

くり込み群

寺尾　治彦

1. はじめに

「群と物理学」という特集であるが，物理学に登場する群というとすぐ思いつくのは変換群と対称性の関係である．集合の要素の積がまたその集合に含まれている場合，その集合を群という．一方，対称性として例えば回転対称性を考えると，2 つの回転変換を続けて作用させるとやはり回転変換になっているので，回転変換の全体は回転群という群を成すという．物理学において対称性は運動法則の基本構造であり，変換群の構造やその表現論は物理学と密接に関わっている．

本稿のタイトルは「群と場の量子論」であるが，これより読者が想起されるであろう対称性や自発的対称性の破れに関する話題ではなく，もっぱら場の量子論や統計理論に用いられる「くり込み群」について紹介しようというのが本稿の主旨である．

以下で紹介するくり込み変換の積は，やはりくり込み変換であるため，変換の全体はくり込み群と呼ばれる．ただしその構造は数の積と同じであり，群としての興味はない．本稿では特に，場の量子論の解析方法という実践的な観点，特に摂動展開法の問題とその近似の改善に焦点を当て，代表的なくり込み群の考え方について，簡単に見ていくこととしたい．くり込み群には，ここで述べる他にも様々な側面があり，例えば本誌の過去の解説[1)]などを参照されたい．

2. 摂動展開とくり込み

まず，最も簡単な実スカラー場の理論を例に，摂動論とくり込み処方について見ておくことにしよう．位置 $\boldsymbol{x}$ と時間 t の関数であるスカラー場 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ は，様々な波長もしくは運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ平面波の重ね合わせとして与えられる．相互作用を無視すると，平面波の振幅 $\phi(\boldsymbol{p},t)$ は，運動方程式

$$(\partial_t^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)\phi(\boldsymbol{p},t)=0$$

を満たす．これは角振動数が $\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ の調和振動子の運動方程式に他ならない．ここに m はスカラー粒子の質量である[*1)]．このように，場は各運動量もしくは各波長毎の無数の調和振動子の集まりと見なせる．量子論では，調和振動子の状態はそのエネルギー準位が等間隔に離散的なものになるが，これが場の量子論では真空，1 粒子状態，2 粒子状態などに対応する．

しかし，相互作用を考慮すると事情は複雑になる．場の相互作用は，この無数の調和振動子の間の相互作用を与える．これら振動子は，長波長のものから極めて短波長のものまで存在し，かつ相互作用により長波長の運動は短波長のそれにより影響を受ける．そして，無数の自由度のために単なる調和振動子の集合とは様相が全く異なってくるのである．

量子力学において，相互作用がある系はその相互作用の係数が小さい限り，係数についての摂動展開を行って計算することが一般的である．摂動計算で期待値を評価する際，遷移可能なすべての中間状態（量子揺らぎ）について足し上げることが必要である．場の量子論でも同様に摂動計算を行うことができ，中間状態として運動量保存を満たすすべての多粒子状態の足し上げを行うことになる．

例えば，$(\lambda/4!)\phi^4$ という相互作用項を持つスカラー場の理論において，その相互作用の大きさを摂動展開の最低次まで評価すると，図 1 のファインマン図で表されるような 2 粒子中間状態についての足し上げが現れる．ここで初項は系に与えられた相互作用であり，

*1)　自然単位系，$c=\hbar=1$ を用いることにする．

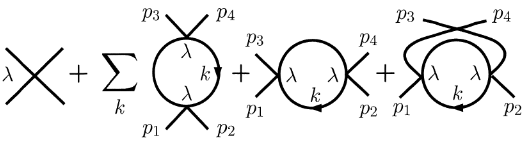


図 1　4 次の相互作用の大きさ $\Gamma^{(4)}$ を与えるファインマン図.

ループ図が量子補正項である．ところが場の理論では，この中間状態の 4 元運動量 k の和が無限自由度のために発散してしまう.

具体的には，相互作用の大きさ $\Gamma^{(4)}$ は*2)，

$$\Gamma^{(4)} = -\lambda - \lambda^2 \sum_{p^2=s,t,u} V(p^2) + O(\lambda^3)$$

となる．ここで図 1 に対応して $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 + p_3)^2$, $u = (p_1 + p_4)^2$ であり，関数 $V(p^2)$ は個々のループ図を表す．今，この関数が発散しているので，運動量 k の範囲を $|k| < \Lambda$ に切断してやると，

$$V(p^2) = \frac{1}{32\pi^2} \ln\left(\frac{-p^2}{\Lambda^2}\right) + (\text{定数})$$

のように与えられることが分かる*3).

このように，観測される相互作用の強さは，量子補正を含む量であり，もともと与えられたパラメータ λ 自体は決して観測されない．そして，相互作用の強さは粒子の運動量に依って変化することにも注意する．もちろん $\Gamma^{(4)}$ は有限の量として与えられるべきなので，逆にパラメータ λ がそもそも発散量ということになる．これでは，物理量の評価ができない．朝永振一郎は，彼が“くり込み”と名付けた以下の処方によって，この無限大の問題を回避できることを発見した.

まず，観測される相互作用の強さを，ある運動量，例えば $s = t = u = -M^2$ で与え，λ_r としよう．これは有限量すなわち切断 Λ に依らない量である．この運動量スケール M をくり込み点と呼ぶ．一方，もともとのパラメータ λ を $\lambda = \lambda_r + \delta\lambda$ とすると，$\delta\lambda$ は相互作用のために生じるずれなので，λ_r の 2 次以上の量と見なされる．また，λ の Λ 依存性は $\delta\lambda$ に取り込まれていることに注意する．すると，摂動展開では λ_r^2 のオーダーまでで

$$\Gamma^{(4)} = -\lambda_r - \lambda_r^2 \sum_{p^2=s,t,u} V(p^2) - \delta\lambda$$

と評価されることになる．くり込み点で $\Gamma^{(4)} = -\lambda_r$ であることから，$\delta\lambda = -3\lambda_r^2 V(-M^2)$ と決まる．このようにして決めた $\delta\lambda$ を用いると

$$\Gamma^{(4)} = -\lambda_r - \lambda_r^2 \sum_{p^2=s,t,u} V_r(p^2) + O(\lambda_r^3),$$

$$V_r(p^2) = \frac{1}{32\pi^2} \ln\left(\frac{-p^2}{M^2}\right)$$

となる．このように，Λ 依存性は相殺し $\Gamma^{(4)}$ を粒子の運動量に対する有限な関数として決定することができる．そのため，相互作用項において $(\delta\lambda/4!)\phi^4$ は相殺項と呼ばれる．言い換えれば，もともとの裸のパラメータ λ をうまく調節して，量子補正を取り込んだ後に相互作用の強さが λ_r になるようにせよ，ということである.

重要なことは，摂動展開の各次数で，また $\Gamma^{(4)}$ 以外のすべての量，例えば 6 点の相互作用 $\Gamma^{(6)}$ についても，量子補正の発散は相殺項で取り除かれ，くり込み点での質量 m_r や相互作用の強さ λ_r の有限な関数として評価できることである．これをくり込み可能性と呼ぶ．朝永振一郎は，電子と光子の場の量子論である量子電磁力学においてくり込み処方を適用することにより，当時発見されたばかりの水素原子のラムシフトを評価することに成功する．この業績により，後に R. Feynman, J. Schwinger と共にノーベル賞を受賞した.

“くり込み”とは朝永振一郎の命名であるが，南部陽一郎氏の回顧録によれば，朝永振一郎はくり込みの概念を「放棄の原理」と呼んだとのことである2)．確かに，“くり込み”は発散の問題をうまく回避する方法ではあるが，発散そのものについての根本的な理解ではない．また，方法としても摂動論の枠内でのみ有効であり，その点でも不完全と言わざるを得ないだろう.

実は，すべての場の量子論において摂動的なくり込みが可能となるわけではなく，その相互作用の形は限られ，スカラー場の場合 $\lambda\phi^4$ のみが許される．例えば，6 点の相互作用項 ϕ^6 が加わっただけで，6 点のみならず 8 点，10 点とすべての相互作用に発散が生じ，無限個の相殺項が必要となる．すなわち理論を決定できないことになる.

20 世紀後半の素粒子物理は，このくり込み可能な場の量子論によって飛躍的な進展を遂げた．量子電磁力学のみならず，素粒子の標準理論がくり込み可能であることは，くり込み可能性を指導原理として受け入れざるを得ないようにも思える．しかしその後，Wilson

---

*2)　正確には，$\Gamma^{(4)}$ は有効作用の 4 次の係数（相関関数）.

*3)　高エネルギー散乱では $m^2 \ll -p^2$ なので，簡単のため質量 m を無視している.

くり込み群の発見によって，標準理論のくり込み可能性はむしろダイナミクスの自然な帰結である，という理解に変わっていくのである．

3. 摂動的くり込み群

場の量子論を指定するために，あるくり込み点 M におけるパラメータ λ_r を与えてやる必要があることが分かった．ところが，くり込み点 M よりも非常に大きな運動量を考えると，やがて

$$\frac{\lambda_r}{16\pi^2}\ln\left(\frac{-p^2}{M^2}\right)\sim 1$$

となるところで，摂動近似は破綻してしまう．逆に，くり込み点の付近では摂動近似は有効なので，高エネルギー現象を評価したければ，くり込み点をそのエネルギー付近に取っておくのが良い．そのためには，くり込み点を変化させたときのパラメータの変換を知る必要がある．この変換をくり込み変換といい，その全体をくり込み群と呼ぶ．

くり込み点を微小に変化させたときの λ_r の変化を評価することは摂動的に行えることに注意しよう．今，任意のくり込み点を μ，そこでくり込まれた相互作用の強さを $\lambda(\mu)$ としよう．$\Gamma^{(4)}$ はこのくり込み点 μ をどこに取るかに依らないはずであるので

$$\mu\frac{d\Gamma^{(4)}}{d\mu}=0$$

が成り立つように $\lambda(\mu)$ が与えられていなければならない．このことから直ちに $\lambda(\mu)$ の微小変化が得られ，

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu}=\frac{3}{16\pi^2}\lambda^2+O(\lambda^3)$$

となる．すなわち同一の理論を与える一連のパラメータ $\lambda(\mu)$ が，この微分方程式（Gell'Mann–Low のくり込み群方程式[3)]）を解くことにより得られる．くり込み群方程式を解くということは，くり込まれたパラメータの変化を逐次的に求めて行くことに他ならないが，この方法により非常に大きなスケールまでその変化を評価できる．

さて，この微分方程式は容易に解け，その解は

$$\lambda(\mu)=\frac{\lambda_r}{1-\frac{3\lambda_r}{16\pi^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)}$$

となるが，λ_r で展開すると無限次数まで含んでいることが分かる．このように，結合定数が $\lambda_r\ll 16\pi^2$ である限り，非常に高エネルギーの領域まで相互作用の強さを良い近似で評価できる．以来，くり込み群は素粒子物理学において不可欠な道具立てとなり，大統一理論などが議論できるようになった[1)]．

4. Wilson くり込み群

今度は，より低エネルギー領域，すなわちより長波長の構造に目を向けてみよう．ミクロなスケールでの構造が与えられたとき，マクロなスケールでどのような現象が生じるかという問題は，素粒子物理学のみならず統計理論においても共通の課題である．特に，すべてのスケールの揺らぎがマクロな物理を左右する系の解析は，無限自由度の揺らぎによる補正を取り込むことが本質的であり，難しい問題となる．その典型例が相転移現象であり，摂動展開によって相転移点近傍での振舞いを評価しようとすると，高エネルギー領域と同様に破綻する．

長波長の物理は，既に短波長の揺らぎを取り込んだ後の有効相互作用で記述するのが直接的である．K.G. Wilson は，ここで無限自由度の揺らぎを一気に足し上げるのではなく，少数の自由度，すなわち特定の波長の揺らぎのみ取り込み，その繰り返しによって順に長波長の揺らぎを取り込むことを考えた[4)]．この一つ一つのステップは，有効相互作用の解析的な変換を与えるだけであるが，その無限の繰り返しに依って非解析的な振舞いを見せる．これが臨界現象であり，Wilson くり込み群によって，臨界指数の間に普遍的に成り立つスケーリング則を簡単に示すことができる．Wilson はこの業績により，1982 年にノーベル賞を受賞した．

まず，その中間状態としてある切断 Λ 以上の高運動量，すなわち短波長の揺らぎのみを足し上げたとしよう．そうすると，もともと ϕ^4 の相互作用のみの系でも，この足し上げによって ϕ^6, ϕ^8 など無限個の相互作用項が誘起される．そこで，くり込み可能か否かに関わらず，対称性で許されるあらゆる可能な相互作用項をいったん用意することになる．切断 Λ を下げていくと，これらの有効相互作用の係数は共に変化し，無限次元のパラメータ空間の中に“くり込み群の軌跡”を描く．この軌跡上のパラメータは，スケールの違いを除いてすべて同一の理論を与える有効相互作用の係数となっている．

少し具体的に見てみよう．今，運動量 $|p|$ が $[\Lambda-\delta\Lambda,\Lambda]$ の範囲にある揺らぎを新たに取り込む．このとき，量子補正をファインマン図の総和と捉えると，この範囲にある中間状態の粒子線がただ 1 つ加わる．な

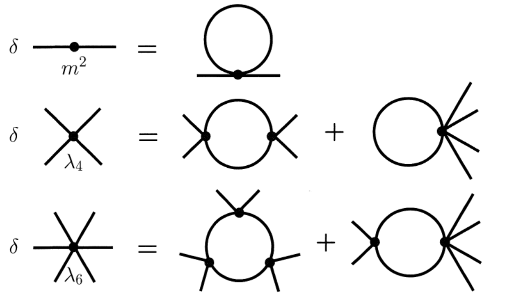


図 2　$m^2, \lambda_4, \lambda_6$ への量子補正を与えるファインマン図．

ぜなら，2 本以上含む図は，$\delta\Lambda^2$ のオーダーになるからだ．切断 Λ での有効作用を

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\Lambda^2\phi^2 - \frac{\lambda_4}{4!}\phi^4 - \frac{\lambda_6}{6!}\Lambda^{-2}\phi^6 + \cdots \right\}$$

とする．ここで，次元を持つパラメータは Λ でスケールし，無次元の量に直している．簡単のため，無限個のパラメータを $\{m^2, \lambda_4, \lambda_6\}$ のみに制限すると，これらへの補正は図 2 のように表される．

くり込み群方程式は，このループ図のそれぞれに対応して以下のように与えられることが分かる．

$$\Lambda\frac{dm^2}{d\Lambda} = -2m^2 - \frac{A_4}{2}\frac{\lambda_4}{1+m^2},$$
$$\Lambda\frac{d\lambda_4}{d\Lambda} = \frac{3A_4}{2}\frac{\lambda_4^2}{(1+m^2)^2} - A_4\frac{\lambda_6}{1+m^2},$$
$$\Lambda\frac{d\lambda_6}{d\Lambda} = 2\lambda_6 - \frac{15A_4}{2}\frac{\lambda_4^3}{(1+m^2)^3} + \frac{15A_4}{2}\frac{\lambda_4\lambda_6}{(1+m^2)^2}.$$

ここに $A_4 = 1/8\pi^2$ である．図 2 から，この補正は単に 1 ループ補正に他ならないように見えるが，λ_6 などくり込み不可能な相互作用も同様に関わるところが重要である．1 ループではあるが，これら高次元の相互作用を取り込むことにより，摂動的くり込み群では得られない非摂動的補正が取り込まれるのである．

さらに簡単のため，相境界近傍，すなわち質量 m^2 が小さいとして無視し，$\{\lambda_4, \lambda_6\}$ のみについての方程式を考えよう．図 3 に，いろいろな初期値の場合のくり込み群の軌跡を点線で描いた．矢印は低エネルギーへの方向を指している．これを見ると分かるように，低エネルギーでは λ_4 も λ_6 も 0 に近づくが，その際初期値に依らず実線（R.T.）で示した曲線に収束することが見て取れる．切断 Λ_0 を無限大とする極限，す

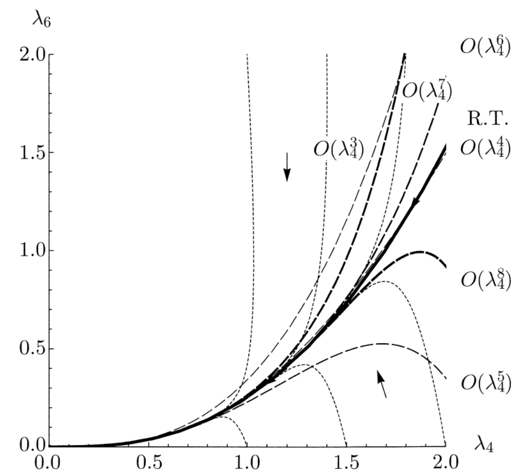


図 3　(λ_4, λ_6) に対するくり込み群方程式による，RG flow（点線），くり込まれた軌跡（実線（R.T.）），および摂動近似（8 次まで）による連続極限（破線）．

なわち連続極限では，この特別な軌跡のみが残る．これを“くり込まれた軌跡”と呼ぶ．

この軌跡上では，λ_4 をいったん決めれば（くり込めば），λ_6 が一意的に決まる．取り込む演算子を増やしても，この様相は同様であり，無限次元のパラメータ空間はくり込まれた軌跡が描かれる有限次元空間に縮退する．このことは，くり込み可能理論が連続極限で自然に現れることを示している*4)．くり込み可能である標準理論が良く実験を説明するということは，新しい物理のスケールがかなり高いことを示しているにすぎないのである．

一方，上の方程式を，摂動展開すれば解は逐次求められる．図 3 には，摂動展開の各次数において得られた解の連続極限を取ったものも，破線で示している．弱結合領域では，確かにくり込まれた軌跡に収束する様子が分かるが，一方強結合領域では逆に変動が激しくなることが分かる．このように摂動展開はやはり破綻してしまう．

実はここで見たようなパラメータごとのくり込み群ではなく，有効作用に無限個の相互作用を含んだ形でのくり込み群方程式が厳密に導かれる．これらは，厳密くり込み群とか汎関数くり込み群などと呼ばれ，いくつかの具体的な定式化が知られている[4~7]．ただ汎

*4)　J. Polchinski は，くり込み可能性すなわちくり込まれた軌跡の存在証明を，Wilson くり込み群方程式を弱結合領域で評価することにより与えた[5]．また，摂動論ではくり込み不可能であるが，非摂動的にはくり込み可能である理論が存在する．

関数微分方程式なので，何らかの近似なしには解析できないが，これらを用いて Wilson くり込み群の演算子展開の次数を向上させることが可能で，またその結果は経験上滑らかに収束する．この性質のため，汎関数くり込み群を用いた場の量子論の非摂動的な解析法として期待される．

5. 力学的くり込み群

ここで話を大きく変え，強制振動下の調和振動子の量子力学について考える*5)．系のハミルトニアンを

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{a}{2}\omega_0^2x^2+\epsilon\omega_0^2\cos\omega_0 t x^2$$

とすると，運動方程式は

$$\ddot{x}(t)+\omega_0^2(a+2\epsilon\cot\omega_0 t)x(t)=0$$

となる．これは Mathieu 方程式という名前がついており，$a=n^2/4$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の近傍で共鳴を起こすことが知られている．この系は，角振動数 ω_0 で上下に上げ下げする振り子に他ならず，この共鳴条件は直感的にも理解できるだろう．

今，$a=1/4+a_1\epsilon$ として，時間に依存する摂動論を考えてみよう．すなわち，$H=H_0+\epsilon H'(t)$;

$$H_0 = \frac{p^2}{2}+\frac{1}{8}x^2,$$
$$H' = \frac{1}{2}(a_1+2\epsilon\cos t)\,x^2$$

である．さて，シュレディンガー表示の状態 $|\psi_S(t)\rangle$ に対して，相互作用表示の状態 $|\psi_I(t)\rangle$ を

$$|\psi_I(t)\rangle=e^{iH_0t/\hbar}|\psi_S(t)\rangle$$

で導入する．この状態はシュレディンガー方程式を用いると

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle=\epsilon H_I'(t)|\psi_I(t)\rangle$$

を満たす．ここに $H_I'(t)=e^{iH_0t/\hbar}H'e^{-iH_0t/\hbar}$ であり，これは H_0 に対するハイゼンベルグ演算子である．この方程式の解を ϵ に対する摂動展開で求めるのが，時間に依存する摂動論である．

状態 $|\psi_I(t)\rangle$ を求める代わりに，相互作用表示の時間推進演算子 $U_I(t)$; $|\psi_I(t)\rangle=U_I(t)|\psi_S(0)\rangle$ を求めても良い．今 ϵ の最低次の摂動展開では

$$U_I(t)=1-\frac{i}{\hbar}\epsilon\int_0^t dsH_I'(s)+O(\epsilon^2)$$

である．ここで調和振動子を生成・消滅演算子で表したもの

$$x_I(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\left(e^{-i\omega_0t/2}a+e^{i\omega_0t/2}a^\dagger\right)$$

を代入すると

$$H_I'(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2}\left[a_1(aa^\dagger+a^\dagger a)+(a^2+a^{\dagger2})\right] + (\text{振動項})$$

と表せる．今，後の都合のため初期条件を与える時刻を τ とし，そこで $U_I(\tau)=\alpha(\tau)$ としよう．そのときの解は

$$U_I(t) = \alpha(\tau)-\frac{i\omega_0}{2}\epsilon(t-\tau)\left[a_1(aa^\dagger+a^\dagger a) + (a^2+a^{\dagger2})\right]\alpha(\tau)+\epsilon(\text{振動項})$$

となる．ここで $t-\tau$ に比例する第 2 項は永年項と呼ばれ，この項のために摂動近似は $\epsilon(t-\tau)\geq 1$ において破綻してしまう．逆に，この摂動近似は $t\simeq\tau$ においては非常に良い．これは，場の量子論の摂動展開に現れた状況と全く同じであることに気づく．

そこで，この“くり込み点” τ をどこにとっても同じ系を表すように $\alpha(\tau)$ を決定しよう．すなわち

$$\frac{dU_I(t)}{d\tau}=0$$

を課す．これがくり込み群方程式であるが，時間発展に対するくり込み群なので力学的くり込み群（dynamical renormalization group）と呼ばれている*6)．$d\alpha(\tau)/d\tau=O(\epsilon)$ に注意すると，$\alpha(\tau)$ に対する方程式として

$$\frac{d\alpha}{d\tau}+\frac{i\omega_0}{2}\epsilon\left[a_1(aa^\dagger+a^\dagger a)+(a^2+a^{\dagger2})\right]\alpha=0$$

が得られる．このとき（振動項）は平均化されて寄与しないことに注意しよう．このくり込み群方程式の解は $\alpha(\tau)=e^{-i\tau H_{\rm eff}/\hbar}$ であり，ここに

$$H_{\rm eff}=\frac{\hbar\omega_0}{2}\left[a_1(aa^\dagger+a^\dagger a)+(a^2+a^{\dagger2})\right]$$

は有効ハミルトニアンと呼べるもので，くり込み群で改善した時間推進演算子である．“くり込み点”は任意に取れるので，$\tau=t$ とすると問題の永年項はなくなり，

$$U_I(t)=\alpha(t)=e^{-itH_{\rm eff}/\hbar}$$

が解となる．この改善された相互作用表示での生成・消滅演算子を

*5) このセクションは文献 8) を基にしている．比較的簡単なので，逐一追っていけるように表式を与えることにした．

*6) まず，微分方程式の摂動解に現れる永年項の問題に対し，このくり込み群の方法が考案された[9]．

$$a_I(t) = e^{i\tau H_{\rm eff}/\hbar} a e^{-i\tau H_{\rm eff}/\hbar}$$

とすれば，この演算子は

$$\frac{da_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[a_I, H_{\rm eff}] = -i\omega_0\epsilon(a_1 a_I + a_I^\dagger)$$

を満たす．$a_I^\dagger$ についても同様である．ここで，$H_{\rm eff}$ が対角的でないために，時間発展と共に a_I と $a_I^\dagger$ が互いに混ざり，そのために共鳴が起こる．

これを見るために，Bogoliubov 変換

$$\begin{aligned} a_I(t) &= \alpha_I(t)a + \beta_I^*(t)a^\dagger, \\ a_I^\dagger(t) &= \beta_I(t)a + \alpha_I^*(t)a^\dagger \end{aligned}$$

によって $a_I(t)$ と $a_I^\dagger(t)$ を与えると，この係数は

$$\begin{aligned} \dot{\alpha_I} &= -i\omega_0\epsilon(a_1\alpha_I + \beta_I), \\ \dot{\beta_I} &= -i\omega_0\epsilon(a_1\beta_I + \alpha_I) \end{aligned}$$

を満たすことが分かる．この方程式はすぐ解けて，$\alpha_I(0) = 1, \beta_I(0) = 0$ より

$$\beta_I(t) = \frac{i}{\sqrt{1-a_1^2}} e^{-i\omega_0 a_1 \epsilon t} \sinh(\gamma t).$$

ここに $\gamma = \epsilon\omega_0\sqrt{1-a_1^2}$ となる．強制振動による励起数の期待値 $N(t)$ は，$t=0$ に調和振動子の基底状態 $|0\rangle$ にあったとすると

$$\begin{aligned} N(t) &= \langle 0|a_I^\dagger(t)a_I(t)|0\rangle = |\beta_I(t)|^2 \\ &= \frac{1}{1-a_1^2}\sinh^2(\gamma t) \end{aligned}$$

として評価できる．この結果より，γ が実数，すなわち $|a_1| < 1$ のときに，共鳴に依る励起が起こることが分かる．

場の量子論は調和振動子の集まりなので，上記と同様の解析が実行できる．特に，初期宇宙における粒子生成の問題[10)]にはそのまま容易に適用できる．さらに，この方法は非平衡系の場の量子論に対して発展させ，量子輸送方程式の拡張，そして種々の具体的な解析が行われた[11)]．この力学的くり込み群は，最初に述べた摂動論のくり込み群のアイデアを時間変化に応用したものに他ならない．これをより非摂動的な解析が可能になるように，Wilson くり込み群に格上げすることは自然な方向であろう．

有効作用の時間変化を非摂動的に評価すれば，そもそも永年項の問題はないので，例えば空間のスケールに対して汎関数くり込み群を立てる方法が用いられる．近年，その定式化が進み，熱平衡状態から大きく外れた系の解析が可能となった[12)]．特に，くり込み変換によって時間反転不変性は保たれているにも関わらず，急速に熱平衡状態に近づいていく挙動を示す．すなわち熱力学第 2 法則である．このことは，Wilson くり込み群でくり込まれた軌跡にすべての軌跡が収束するのと共通の要因が根底にあるように思われるが，興味深い問題である．

6. おわりに

場の量子論は古典論とは違い，作用が与えられてもそのパラメータには意味がなく，あるくり込み点におけるパラメータの値を別途指定する必要があった．結局，場の量子論が与えているものは，くり込み変換の構造すなわちくり込み群なのであり，これは発散とは無関係に決められるのである．また，くり込み群は摂動展開の改善，そして非摂動的解析という側面も持つことも見た．このように，くり込み群は場の量子論の本質であり，今後も様々な局面での発展が望まれる．

参考文献

1) 数理科学，「くりこみ理論の地平」 1997 年 4 月号；別冊・数理科学「場の量子論の拡がり」(2006).
2) 南部陽一郎，日本物理学会誌 **57** no.1, 2–8 (2002).
3) M. Gell-Mann, F.E. Low, *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954).
4) K.G. Wilson, Nobel letcure, 8 December, 1982; K.G. Wilson, J.B. Kogut, *Phys. Rep.* **12**, 75 (1974).
5) J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **231**, 269 (1984).
6) F.J. Wegner, A. Houghton, *Phys. Rev.* **A 8**, 401 (1973).
7) C. Wetterich, *Phys. Lett. B* **301**, 90 (1993).
8) I.L. Equsquiza, M.A. Valle-Basagoiti, arXiv:hep-th/9611143.
9) 大野克嗣，臨時別冊・数理科学「20 世紀の物理学」，40–50, 1998 年 9 月；L.-Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, *Phys. Rev.* **E 54**, 376 (1996).
10) Y. Shatanov, J. Traschen, R. Brandenberger, *Phys. Rev.* **D 51**, 5438 (1995).
11) D. Boyanovsky, H-J. deVega, S-Y. Wang, *Phys. Rev.* **D 61**, 065006 (2000).
12) J. Berges, *AIP Conf. Proc.* **B9**, 3 (2005); J. Berges, D. Mesterházy, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **228**, 37 (2012).

（てらお・はるひこ，奈良女子大学理学部）

有限群で空間を潰そう

宮本　雅彦

人間ならば誰にでも，現実のすべてが見えるわけではない．多くの人は，見たいと欲する現実しか見ていない．

『ローマ人物語 8 ユリウス・カエサル ルビコン以前［上］』（塩野七生，新潮文庫）

タイトルで，「空間を潰そう」と言っているが，過激デモのように「完全に潰せ」と叫んでいるわけではない．ただ，僕のような乱視の人間は，建物を眺めても歪んで見えてしまう．視力検査などでは，どう歪んで見えるかを考えて，文字を頭の中で判断することがある．これを数学的に考えてみようというのが今回の話である．

物理学は，我々が住んでいる世界や空間を厳密に記述しようとする学問である．一方，数学者は，美しく整った世界が好きである．直線はあくまで真っすぐ無限に長い．そして，そうでなければ直線ではない．こんなことを言うと，「実際我々が住んでいる宇宙は閉じた世界だから数学的な直線などはない」と言われる．でも，実世界とは何だろう．それらは，実験や視覚などで手に入れた情報など，我々が認識できるものを使って理解しているものである．

これを言うと，一般社会では誤解されて嫌われるが，数学は人間の感覚や認識を完璧なものだとは考えない．理屈の通じない人に，いくら論理で説明しても無駄とか，美的感覚のない人に骨董品の価値が分からないという類のものではない．人類そのもの，認識そのものに不完全さを秘めていると考える．これは数学の長い歴史の中で会得してきたものである．これがあるからこそ，現在得られている数学の結果を信用できる．

この立場から見ると，我々が住む本当の世界を説明する場合，人間の認識で判断した世界を指すのか，それとも我々には認識できないものがあることを踏まえて，元の世界を指すのか，一概にどちらが正しいのか言えなくなってしまう．それなら，実世界は美しく整っていると考えたほうが数学者としては楽しい．

例えば，我々が住んでいる空間は通常では 3 次元空間であり，時間軸を加えても 4 次元であると考えたほうが感覚と合致する．ところが，ある物理理論では，次元は 10 次元であるとか，高い次元で考えたほうが説明しやすいことがある．私の研究している有限群論では，時間軸を無視すると 24 次元，時間軸を含めて 26 次元の世界が特別美しい構造を持っている．有限群研究者としては，できれば，特別大きい有限群である**モンスター単純群**が作用しているような，豊かな対称性を持つ世界に住んでいたい．

人間には認識できないものがあるという考え方に従えば，「我々は実際にそのような高次元に住んでいるが，3 次元とか 4 次元としてしか認識できないのではないか」と考えることができる．

高次元を扱った物理の読み物本では，次元を減らす理由として 4 次元より外の空間の次元部分は，空間の幅が非常に短いので，人間には認識できないのだと説明しているものがある．微小なものが見えないというのは自然な感覚であり，一般読者は違和感を感じても，読み進んでくれるだろう．しかし，数学というのは面倒な学問で，この説明では納得できない．なぜなら，長さというのは相対的なもので，空間の長さがどれほど小さくても，「自分もその世界に住んでいれば，微小とは感じない」と考えてしまう．しかも，群論研究者としては，自分たちの 4 次元と外の次元空間が全く別物の場合には，その世界は数学的に美しくない．

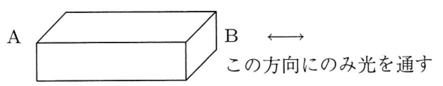
それでは，美しさを失わず，次元を潰す方法はあるだろうか？ それが，この論説の趣旨であり，元の世

界がかなり数学的な美しさを持っていても，有限群を使って空間を潰すことができる．

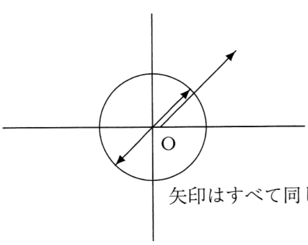
1. 歪んだ平面

まず，閉じた空間だと感じるのに，直線や平面が存在する話をしよう．ただし，ここでは潰す方法として有限群よりも大きなものを使う．

テレビの画面等に使われている液晶を観察することを考えてみよう．液晶とは液体と結晶の中間的なもので，液晶ディスプレーなどには光の透過性に1次元的な性質を持つものが使われている．この光の透過性の1次元的な性質に注目して，擬似的ではあるが，下図のような直方体型の結晶で，ある方向の光は通すが，それ以外の方向の光を通さない物体を考えてみよう．



上の結晶が空間に浮いているとして，結晶がどの方向に向いているか観察してみよう．左の面の中心Aを空間座標の原点Oにおき，もう一方の面の中心Bの位置を座標で考えてみる．我々が持っている手段は，光を当てて，透過を観察するだけである．結晶の光の透過率が100%の場合，結晶の長さには関係なく，方向しか分からない．例えば，ABをベクトルで表してみると，下の3つの矢印は全く同じものとして観測される．



実際には，頂点Bは空間のどの位置にでも存在する可能性があるが，我々が認識できるのは，方向だけであり，長さは分からないので，あたかも結晶の存在している世界は，Bが単位球面上にあると認識してしまう．しかも，360度回転したものも，180度回転したものも区別がつかず，球面上の点と考えた場合でも，反対側の点を同じと思う（射影球面と呼ばれる）球面に存在すると認識してしまう．この射影球面は閉じた世界であるが，本当に結晶の点Bが存在する世界は通常の3次元空間である．

上の例は，直線を点として認識したので，失ったものが多く，これから元の世界を復元するのはかなり大変であろう．そこで，結晶の光の透過率は100%でないとしよう．すると，結晶の長さは減衰率から計算できる．この場合でも，動かさないものと，180度回転させたものとの区別は付けられない．頂点Bの座標を $P=(x,y,z)$ とすると，それを -1 倍する操作で移る $-P=(-x,-y,-z)$ との区別が付かないのである．

即ち，空間の点を -1 倍する作用を我々は認識できていないことになる．たった2点を区別できないだけだが，この世界では直線は片方だけに伸びているように感じる．しかも，面白いことに，結晶を180度回転させたときに，Bの軌跡は半円を描くが，我々には，最初の点に戻ったと認識する．即ち，半円なのに，閉じた円を描いたように感じるわけである．この世界では，閉じた弧と閉じていない弧の区別が明確にできないことになる．

2. 見えない操作のなす群

本当に潰すという行為は一般に元に戻せないが，ここでは，我々に認識できないだけのことなので，上の -1 倍の作用のように，元に戻せるものだけを考える．

そのような作用で，我々には認識できないもの全体の集まりを考えてみる．それらは作用の合成（一つの作用の後で別の作用を続ける）により，**群**となる．実際，群の条件である以下の3条件を満たす．

(1) 何もしなければ認識できない（単位元の存在）．
(2) 認識できない作用の合成も認識できない（演算が存在し，結合律を満たす）．
(3) 認識できない作用を元に戻す作用も認識できない（逆元の存在）．

それゆえ，我々が認識できない作用があれば，それら全体は群となっている．

数学的に形式化すると，

(1) 現象の集まりが張るベクトル空間 X があり，
(2) そこに群 G が作用しているとして，
(3) 我々には G の作用が認識できない．

ということを考えている．このとき，我々の認識している世界は上で述べたように，歪んでいる．それでも，それを分かり易いベクトル空間として理解する方法はないだろうか？ G が有限群の場合には，良い方法がある．$x\in X$ の $g\in G$ による作用を $g(x)$ で表すと，x と $g(x)$ の区別が付かないので，G が有限群の場合には，***G*-軌道**の平均

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(x)$$

が定義でき，x と同じものと認識される．良く見ると，平均は G の作用で動かない元たちである．そのような元全体を X^G で表す．まとめると，長さなどは変形されているが，我々が認識したつもりの世界の点と X^G の点は一応，1 対 1 対応していると思える．

読者の中には，「認識できないなら，最初からなかったと考えたら？」と思われる方がおられるだろう．しかし，単独では認識できなくても，複数回出てくると実態として認識できるものがある．例えば，液晶のように，G が位数 2 の群 $\{1,\theta\}$ で，θ は -1 倍，1 は恒等変換の場合を考えてみよう．もし，$a\in X$ で，$\theta(a)=-a$ となるような元があれば，a と $-a$ は区別がつかないので，a はゼロと認識してしまう．ところが，積 $a\times a$ に対応するような現象が起こる場合，$\theta(a\times a)=\theta(a)\times\theta(a)=(-a)\times(-a)=a\times a$ となるので，$a\times a$ は存在が認識できる．例えば，2 点 A, B を結ぶ弦を考える．A, B が認識できないほど高速で交換されるような場合，我々は A, B の区別がつかないので，そこに弦があることを断定できない．しかし，弦の存在または弦の中心は認識できる．弦とは実質的には 1 次元であるが，A, B の区別がつけられない場合には，我々には点として認識される．本当は 1 次元の物体を 0 次元の点として認識してしまうわけである．

3. 状態の空間

頂点 A, B からその中心や線分を考えるように，ある状態の集まりが与えられたとき，それらから派生される（すべての可能性の）状態全体を考える必要が出てくる．このような理論の一つが**場の理論**と呼ばれるものである．場の理論とは簡単に述べると，互いに影響を与え合う**状態**の集まりのことである．状態って何と思ったかも知れないが，心配しないでほしい．数学的に考えるので，状態と言ってもまずは単なるベクトルにすぎない．即ち，状態全体の張るベクトル空間 V を考え，V の各元 v が時空間の点 z に依存した**影響**を V に与えていることになる．この影響も数学的に言えば，V の線形変換を値として持つ関数 $v(z)$ のことである．

場の理論を数学的に記述する一般的方法の一つとして，**頂点代数**と呼ばれるものがある．簡単な空間から定義される頂点代数に**フリーボゾン型頂点代数**と呼ばれるものがある．まずは，これの紹介から始めよう．先に断っておくが，これを数学的にきちんと定義しようとすると，かなり複雑なものとなる．ここで説明するのは，1 次元空間に対するものであるが，できあがる場の理論は無限次元空間である．

$\mathbb{C}\boldsymbol{h}$ を 1 次元空間とする．ここで，h は単位ベクトルであり，液晶の時の単位ベクトルの一つだと思って良い．この h が状態の空間 V に時空間の点 z に依存した影響 $h(z)$ を与えていると考える．手順をすべて省略するが，この $h(z)$ をフーリエ展開したもの

$$h(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)z^{-n-1}$$

を考えるのである．この “$h(n)$” は V の線形変換（行列だと考えてもよい）である．フリーボゾン型と呼ばれるのは，これらの間の交換関係として，かなり簡単なハイゼンベルグ代数の関係式

$$h(n)h(m)=h(m)h(n)+\delta_{n+m,0}n$$

を与えたものである．また，$h(-n)$ の**エネルギーレベル**を n とする．

次に，状態の空間 V の説明に入ろう．何もない**真空状態**も一つの状態と考えるのが，場の理論であり，$\mathbf{1}$ という記号で表す．当然，このエネルギーレベルは 0 である．この真空に上の $h(z)$ が次から次へと影響を与えている．即ち，真空状態 $\mathbf{1}$ に $\{h(n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ を次から次へと作用していってできあがるもの全体で張られる V の部分空間 $M(1)$ を考えるのである．

ただし，エネルギーレベルが負になるものは考えないので，$n\geq 0$ に対しては，$h(n)\mathbf{1}=0$ と考え，このような作用を消滅作用素と呼んでいる．エネルギーレベルは作用のエネルギーレベルの和だとすると，レベル 0 のものは $\mathbb{C}\mathbf{1}$ だけであり，1 次元空間を作る．レベル 1 の状態は 1 種類で生成された $\mathbb{C}h(-1)\mathbf{1}$ であり，これも 1 次元空間となる．レベル 2 は 2 種類の状態で生成された $\mathbb{C}h(-2)\mathbf{1}+\mathbb{C}h(-1)h(-1)\mathbf{1}$ となっており，2 次元空間である．一般に，レベル n の状態の空間 $M(1)_n$ の次元は n の自然数による和の表示の仕方と一致しており，形式的な記号 q を利用して，次元を係数とする母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\dim M(1)_n q^n=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^k)}$$

と簡単に表すことができる．

もし，人間には 1 次元空間 $\mathbb{C}h$ 上での -1 倍の作用 θ が認識できないとしよう．すると，それから作り出されたレベル n の作用 $h(-n)$ においても，$h(-n)$ と $-h(-n)$ の区別がつかないことになる．それゆえ，

$\mathbb{C}h(-1)$ や $\mathbb{C}h(-2)$ は 0 として認識される．しかし，$h(-1)h(-1)\mathbf{1}$ は θ によって $(-1)^2h(-1)h(-1)\mathbf{1} = h(-1)h(-1)\mathbf{1}$ なので，認識できる．また，$h(-2)h(-1)$ なども認識できる．それゆえ，我々が認識する空間では，レベル 1 の状態は存在せず，レベル 2 の状態は 1 次元だけとなる．これは，先ほど述べたように，空間

$$M(1)^+ = \{v \in M(1) \mid \theta(v) = v\}$$

と同一である．この空間もレベル n の空間を $M(1)^+_n$ で表すと，次元に関する母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim M(1)^+_n q^n$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^n)} + \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^n)}\right\}$$

とかなり簡単に計算できる．

4. パラレルワールド

上で述べた認識できる世界は，θ の作用に関して，固有値 1 の世界であった．$\theta^2 = 1$ なので，固有値 -1 の世界

$$M(1)^- = \{v \in M(1) \mid \theta(v) = -v\}$$

も考えることができる．我々に認識できる世界ではない．しかし，数学的には考えることができる世界であり，パラレルワールドである．残念ながら，我々と似た生命体がいるとか，移り住めるというような映画のパラレルワールドではない．後で説明するが，$M(1)^+$ の元と $M(1)^-$ の元の積を考えることができ，それは $M(1)^-$ の元となる．このような性質を満たすものを $M(1)^+$ の**加群**と呼んでいる．重要なことは，$M(1)^+$ の構造だけで，加群がどれだけあるか分かることである．即ち，認識できている世界 $M(1)^+$ だけから，どれだけパラレルワールドがあるか分かるわけである．もし，我々が，モンスター単純群という膨大に大きな有限群が作用している非常に整った世界に住んでいて，モンスター単純群の作用を認識できないとしても，我々の世界を詳しく調べると，どれだけパラレルワールドがあるのか分かり，モンスター単純群が作用しているかどうかわかるわけである．

5. 場の理論と頂点代数

最後に，難しくなるが，場の理論の一つである頂点代数を説明しておこう．$M(1)$ における場 $h(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h(m)z^{-m-1}$ の一般化である．

まず，記号を説明しておく．V をベクトル空間とし，V の線形変換全体の集まりを $\mathrm{End}(V)$ で表す．$\mathrm{End}(V)$ の元たち u_i を係数に持つような形式的なベキ級数 $\sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i z^i$ 全体の集合を $\mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$ で表し，負ベキが有界なローレンツ級数 $\sum_{j=r}^{\infty} u_j z^j, r \in \mathbb{Z}$ 全体からなる $\mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$ の部分空間を $\mathrm{End}(V)((z))$ で表す．これらを使って，場（即ち影響）を表示するのである．

ここで考えている時空は 2 次元だが，ある手続きを使って複素変数 z で表示する．代数的に扱うので，最初からこういうものだと考えるのも一つの手である．各状態 $v \in V$ に対して，v の場とは時空間の点 $z = e^{2\pi it}$ を変数に持つ，$\mathrm{End}(V)$ に値を持つ関数 $Y(v,z)$ である．$h(z)$ のときと同様にフーリエ展開して，

$$Y(v,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} v_m z^{-m-1} \in \mathrm{End}(V)[[z,z^{-1}]]$$

と表示する．これを v の**頂点作用素**と呼んでいる．場の理論の数学がこれまでの数学と大きく異なるのは，ベキが上にも下にも有界でないことである．そのような形式的べき級数は，z に値を入れても $Y(v,z)$ が決まるわけではないが，非常に面白い性質を持っている．例えば，$\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$ をデルタ関数と呼ぶが，x にどんな実数を入れても値を取ることはない．しかし，任意の多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x,x^{-1}]$ に対して，

$$f(x)\delta(x) = f(1)\delta(x)$$

となっている．即ち，$f(x)$ 倍という作用に対して，$f(1)$ を固有値として持つ固有ベクトルなのである．また，x^{-1} の係数を求める操作 Res_x を使うと，$\mathrm{Res}_x f(x)\delta(x) = f(1)$ となっている．

真空 $\mathbf{1} \in V$ は他の状態に影響を与えないので，その頂点作用素は V の恒等写像

$$Y(\mathbf{1},z) = \mathrm{id}_V \qquad (1)$$

である．また，すべての状態は，遠い昔に真空から派生したと考え，

$$\lim_{z\to 0} Y(v,z)\mathbf{1} = v \qquad (2)$$

を満たしていると考える．(2) を成分で表示すると，$v_n\mathbf{1} = 0\,(n>0)$, $v_{-1}\mathbf{1} = v$ ということになる．各元 $v, w \in V$ に対して頂点作用素の作用

$$Y(v,z)w = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n w z^{-n-1}$$

を定めたわけだが，真空のときと同様に，太古では，それなりに定まっていたと考え，z の負冪は有界，即ち $Y(v,z)w \in V((z))$ と考える．

上で述べたことを公理化しておこう．一般にベクトル空間 W とそれ上の線形変換を係数に持つ形式的ベキ級数

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}, \quad a_n \in \mathrm{End}(W)$$

で，任意の $w \in W$ に対して，$a(z)w \in W((z))$ となるとき，$a(z)$ を**量子作用素**と呼ぶ．量子作用素 $a(z) = \sum a_n z^{-n-1}$ に対して，**形式的微分**した

$$\frac{d}{dz} a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n-1) a_n z^{-n-2}$$

も量子作用素である．明らかに，W 上の量子作用素の集まりは形式的微分の作用で閉じたベクトル空間となっている．

物理現象を考えた場合，状態 v による影響の後で状態 u による影響を受けていることも考える必要がある．しかし，上下に有界でない形式的なベキ級数は簡単に積を取ることができない．例えば，

$$\delta(z)\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\cdots + 1 + \cdots + 1 + \cdots) z^n$$

は定まらない．ところが，非常にうまい方法がある．2 つの量子作用素 $v(z) = \sum v_n z^{-n-1}$ と $u(z) = \sum u_m z^{-m-1}$ の合成作用 $v(z)_{-1} u(z)$ とは，$v(z)$ の z の負ベキ部分 $v^-(z) := \sum_{n \geq 0} v_n z^{-n-1}$ を $u(z)$ よりも先に作用させ，非負べき部分 $v^+(z) := \sum_{n<0} v_n z^{-n-1}$ を $u(z)$ の後で作用させる．すなわち，

$$v(z)_{-1} u(z) := v^+(z) u(z) + u(z) v^-(z)$$

を考えると，これも量子作用素となる．これを**正規積**と呼んでいる．$v(z)$ の過去は $u(z)$ の未来より先に作用させるとでも考えるのだろう．

場の理論の重要な公理の一つに，一般相対性理論における**因果律**，または光速度不変の法則と呼ばれるものがある．簡単に言うと，光より早く情報が伝わることはないというものである．ニュートリノが光よりも早いというニュースはその後否定されたので，今でもこの公理は正しいと設定しても良いだろう．この公理を頂点作用素の言葉で書くと，x, y を 2 変数として，任意の $v, u \in V$ に対して，ある自然数 n があって

$$(x-y)^n \{v(x)u(y) - u(y)v(x)\} = 0$$

となることと同値であることが分かる．右辺のゼロは，値としてではなく，恒等的にゼロだと言っている．普通の多項式 $f(x,y)$ が $(x-y)^n f(x,y) = 0$ なら，$f(x,y) = 0$ と言えるが，場を表示する頂点作用素では異なる．例えばデルタ関数を見ると，

$$(x-y)\delta\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

であるが，$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ ではない．このデルタ関数が重要で，因果律とは，交換子

$$[v(x), u(y)] := v(x)u(y) - u(y)v(x)$$

がデルタ関数 $\delta\left(\frac{x}{y}\right)$ やそれらの高次微分たちの線形和になっていることである．また，上の式は，$x = y$ 以外では，$v(x)$ と $u(y)$ が可換ということから，**局所可換**と呼ばれている．

局所可換性は形式的微分や上で述べた正規積との相性が良く，$Y(v,z), Y(w,z), Y(u,z)$ が互いに（自分自身とも）局所可換なら，$\frac{d}{dz} Y(v,z)$ や正規積 $Y(v,z)_{-1} Y(w,z)$ も $Y(u,z)$ と局所可換となる．これが何を意味するかというと，互いに局所可換な量子作用素の集まりから出発して，微分や正規積を繰り返していっても，やはり互いに局所可換な量子作用素たちの集まりになり，最終的には互いに局所可換でしかも微分や正規積によって閉じたものができることになる．これが頂点代数の原型である．しかも，頂点代数の基本は，状態（ベクトル）と場（量子作用素）の対応が一対一だと考えることである．例えばある状態 v があれば，その量子作用素 $Y(v,z)$ の形式的微分 $\frac{d}{dz} Y(v,z)$ を与える状態 $T(v)$ もある．また，量子作用素 $Y(v,z)$ と量子作用素 $Y(u,z)$ の合成も存在し，正規積 $Y(v,z)_{-1} Y(u,z)$ を与える場 $v_{-1} u$ も存在する．

これで一応，頂点代数の説明が終わったので，前に説明したフリーボゾン型の $M(1)$ が頂点代数となっていることを確認しておこう．実際，定義から $m > 0$ なら，$h(m)$ の作用はレベルを m 下げており，$M(1)$ は負のレベルを持たないので，

$$h(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m) z^{-m-1} \in \mathrm{End}(M(1))[[z, z^{-1}]]$$

を考えると，これは $M(1)$ 上の量子作用素である．直接計算してみると，

$$\begin{aligned} & h(x)h(y) - h(y)h(x) \\ &= \left[\sum_m h(m) x^{-m-1}, \sum_n h(n) y^{-n-1}\right] \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} m x^{-m-1} y^{m-1} \end{aligned}$$

なので，

$$(x-y)^2 [h(x), h(y)] = 0$$

であることがわかる．即ち，$h(x)$ はそれ自身と局所可換である．上で説明したように，これから正規積や形式的微分を繰り返していけば，頂点代数が構成できる．この説明でも分かるように，一つでも自分自身と局所可換な量子作用素を見つけると，頂点代数が構成でき，一つの場の理論を構成したことになる．

（みやもと・まさひこ，筑波大学大学院数理物質科学研究科）

有限群と素粒子物理学

小林　達夫

1. はじめに

素粒子物理学の中で，対称性は重要な概念の一つである．その対称性には様々な種類があるが，可換な離散 Z_N 対称性や連続対称性などは，素粒子論の様々な場面に登場する．離散対称性の例は，空間反転，時間反転，電荷共役などである．さらに，模型構築の目的でいろいろな Z_N 対称性が課せられる．例えば，超対称性標準模型において，しばしば課されるR-パリティーは，Z_2 対称性である．もちろん，連続対称性も非常に重要であり，ローレンツ対称性などは連続的な対称性の重要な例であり，また，標準模型の枠組みでは強い相互作用，弱い相互作用，電磁的な相互作用は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ という連続群に対応するゲージ理論で記述される．このように様々な対称性が素粒子物理学の基本となっている．

一方で**非可換な離散群**は，正三角形や正四面体などの幾何学的な対称性となっているなど非常に直観的であり，馴染み深いものであるが，素粒子物理学の中でこれまで登場の機会は少なかった．しかし，その重要性が最近高まっている．

その理由の一つは，最近ニュートリノの振動実験の結果，**レプトン混合角**が精密に測定され，その混合角が大きいことが分かり，それを導出する模型構築として，非可換離散群が注目されていることである（レビューとして文献1〜4)参照）．

一方で，統一理論の候補である**超弦理論**を特殊な空間にコンパクト化すると非可換離散対称性がクォークやレプトンの**フレーバー対称性**として現れる．このように，非可換離散フレーバー対称性は，フレーバーの起源を探るボトムアップ的なアプローチとより基本的な理論を結び付ける架け橋となるかもしれない．

ここでは，最近の離散フレーバー対称性に関する研究を簡単に紹介する．

2. 簡単な有限群の例

この節では簡単な**有限群**の例を示すことにする．まずは，群の性質をまとめておこう（詳しい群の性質や有限群の具体例は，文献2, 3, 5〜7)参照）．群とは，以下の性質 i)–iv) を満たす積が定義される集合 G である．

i) 群 G の2つの要素 a, b の間の積 ab として得られる要素 $c=ab$ もこの群に属している．

ii) 結合則：$(ab)c=a(bc)$.

iii) 単位元：群の任意の要素 a に対し，$ae=ea=a$ を満たす要素（単位元）e が存在する．

iv) 逆元：群の任意の要素 a に対し，$aa^{-1}=a^{-1}a=e$ を満たす要素（逆元）a^{-1} が存在する．

また，簡単な言葉の定義として，群の要素の数が有限であるものを有限群と呼ぶ．さらに，群の中の任意の2つの要素 a, b に対して，$ab=ba$ が

成り立つ群を**可換群**（**アーベル群**）と呼び，成り立たない群を**非可換群**と呼ぶ．

まず最も簡単な離散群の例の一つは，2 次元空間での $2\pi k/N$ 回転である．ここで $k = 0, \cdots, N-1$ である．明らかに $2\pi/N$ 回転が基本的な群の要素なので，それを a で表すと $2\pi k/N$ 回転は a^k と書くことができる．ここで，$k = 0$ の要素はこの群の単位元になっていて，特別に e と表すとすると $a^N = e$ を満たす．このような群 $\{a^k | k = 0, \cdots, N-1\}$ を Z_N 群と呼ぶ．この群の任意の要素は，$a^k a^m = a^m a^k$ を満たし，可換である．

次に非可換群の簡単な例をいくつか紹介することにする．図 1 のように正三角形の頂点を $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ とし，それらを移し換える対称性を考える．まずは，頂点を順繰りに

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \to (\mathrm{C}, \mathrm{A}, \mathrm{B}) \\
&\to (\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}) \to (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})
\end{aligned}
$$

と $2\pi/3$ 回転していく対称性がある．それとは別に，A は動かさずに B と C を入れ換えるような

$$
(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \to (\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{B})
$$

という折り返しの対称性がある．同様な折り返しの対称性があと 2 つある．従って，この対称性に対応する群は 6 つの要素からなっていることが分かる．結局，この群は $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ という 3 つのものの順番をいろいろ入れ換える置換からなる群であり，その置換の種類は，そのままに保つものも含めて $3! = 6$ 通りであり，S_3 群と呼ばれる．上の $2\pi/3$ 回転を行う要素を a とし，B と C の折り返しを行う要素を b と書くことにすれば，それぞれ $a^3 = b^2 = e$ に従うので，この対称性には，部分群として，Z_3 と Z_2 群が含まれていることが分かる．ただし，

$$
ab \neq ba
$$

であるので，この対称性全体は可換群ではなく，非可換群である．S_3 群の 6 つの要素は，$a^k b^m$ $(k = 0, 1, 2,\ m = 0, 1)$ で書くことができる．

同様に図 2 のように頂点 $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ をもつ正方形の対称性も議論することができる．正方形には，頂点 $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ を $2\pi k/4$ 回転する対称性がある（ここで，$k = 0, 1, 2, 3$）．この $2\pi/4$ 回転を a と書けば，この Z_4 対称性の要素は，a^k $(k = 0, 1, 2, 3)$ の 4 つである．さらに，正方形は，例えば A, C を軸として，B と D を入れ換えるような対称性があり，この反転の対称性を b で書く．同様に，他の軸に対する反転の対称性があり，それらはまとめて，$\{a^k b^m | k = 0, 1, 2, 3,\ m = 0, 1\}$ である．このような群も非可換群で D_4 と呼ばれる．同様にして，正 N 角形は，$2\pi/N$ 回転と，反転の対称性があり，その対称性は D_N と呼ばれる．D_3 と S_3 は同型である．

次に，正四面体の対称性を考えてみよう．図 3 のように正四面体の 4 つの頂点を $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ とする．正方形の対称性のときと同様に，正四面体の対称性は，$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ という 4 つのものを入れ換える $4! = 24$ 通りの置換がなす群であり，S_4 と呼ばれる．ただし，この場合は，正四面体の裏表を入れ換える対称性も含まれている．このような裏表の入れ換えを考えない場合は 4 つのものの

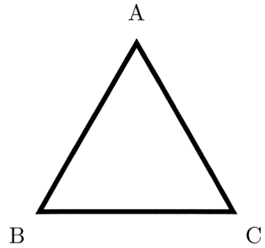


図 1　正三角形.

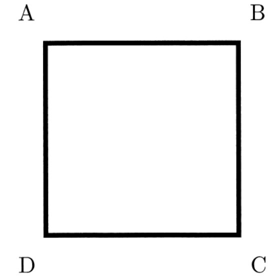


図 2　正方形.

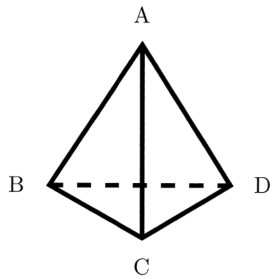


図 3 正四面体.

偶置換のみの入れ換えに対応し，その要素の数は 24 通りの半分の 12 である．そのような偶置換のみのなす群は A_4 と呼ばれる．明らかに A_4 は S_4 の部分群である．

S_4, A_4 群と S_3, D_4 群の大きな違いの一つは，既約表現として，S_4 や A_4 は，3 次元表現をもつのに対し，S_3 や D_4 は，既約表現としては，1 次元表現と 2 次元表現しかもたない点である．つまり，このような有限群をクォーク，レプトンの世代構造の解明に応用する場合，S_4 や A_4 においては，3 世代をまるごと既約表現に対応させることができるが，S_3 や D_4 の場合は，3 世代はいつでも可約表現に対応する（表現論の詳細は，文献 3) 参照）．

その他様々な有限群があるが，それらの性質については，文献 3) 参照．

3. 超弦理論

前の節では，正 N 角形や正四面体などの幾何学的な対称性として，有限群が現れることを見てきた．もし，そのような有限群の対称性が素粒子の世界に現れるのなら，4 次元時空以外にコンパクト空間があり，その幾何学的な対称性がその起源なのではないかと素朴に想像することができるであろう．

超弦理論は，重力を含むすべての相互作用と物質場も統一的に扱う基本理論の有力な候補である．この超弦理論は，我々の 4 次元時空以外に 6 次元の余剰次元の存在を予言する．そして，実際そのような余剰次元上の超弦理論から，フレーバー対

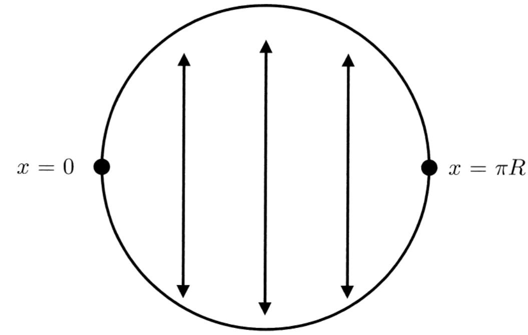


図 4 S^1/Z_2 オービフォルド.

称性として，有限群が現れることが知られている．

例えば，S^1/Z_2 オービフォルド上のヘテロ型弦理論を考えてみよう[8,9]．S^1 上の座標を x とすると，S^1 上では x と $x + 2\pi R$ が同一視される．さらに，図 4 のように x と $-x$ を同一視したものが，S^1/Z_2 オービフォルドと呼ばれるものであるが，円を $x = 0$ とその "向かいの点" $x = \pi R$ で畳み込んだような $x = [0, \pi R]$ からなる線分である．この場合，$x = 0$ と $x = \pi R$ は特異点となっている．このような特異点がある場合，その特異点に巻き付いた弦が存在し，その特定の振動モードがクォークやレプトンに対応する．上のような S^1/Z_2 オービフォルド上のヘテロ型弦理論の場合，$x = 0$ と $x = \pi R$ の 2 つの特異点にそれぞれクォーク・レプトンの 1 世代に対応する巻き付いた弦をもつ模型が知られている．この場合に 2 つの特異点に巻き付いた弦をそれぞれ，$|0\rangle$, $|\pi R\rangle$ と書くことにするとそれを区別するための Z_2 量子数が存在する．つまり，2 つの弦は Z_2 の量子数が偶と奇で区別され，そのような Z_2 変換を b とすると

$$b \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |\pi R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |\pi R\rangle \end{pmatrix}$$

と表現できる．さらに，S^1/Z_2 オービフォルド上において 2 つの特異点 $x = 0$ と $x = \pi R$ を入れ換える幾何学的な対称性があり，その入れ換えの操作を a' とすると，a' は

$$a' \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |\pi R\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |\pi R\rangle \end{pmatrix}$$

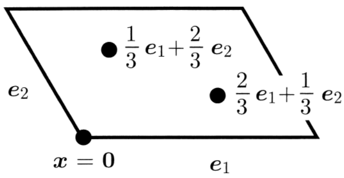


図 5　T^2/Z_3 オービフォルド.

と表現できる．この a' と b で閉じた代数を構成すると前の節で紹介した D_4 となる．具体的には，上の b は D_4 群の b に対応し，$a=a'b$ が D_4 群の a に対応する．

同様に，T^2/Z_3 オービフォルドの場合も考えることができる[9]．T^2/Z_3 オービフォルドは，まず2次元平面上の点 $\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}+n_1\boldsymbol{e}_1+n_2\boldsymbol{e}_2$ と同一視することで，2次元トーラス T^2 を構成する．ここで n_1, n_2 は整数であり，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は，120度の角度をなす同じ長さの2次元のベクトルである（これらは，$SU(3)$ のシンプルルートに対応する）．さらにこの T^2 を120度回転で割る，つまり，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を120度回転で同一視することで，T^2/Z_3 オービフォルドが構成される．この場合，S^1/Z_2 オービフォルドと同様に特異点が現れるが，その数は3で，それぞれ，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2,\ \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2$$

に対応する（図5参照）．従って，この3つの特異点に巻き付いた弦を区別する Z_3 量子数が存在する．さらに，3つの特異点を入れ換える幾何学的対称性は，前節で説明した正三角形の対称性と同じ S_3 であり，これらを含む閉じた群は，$\Delta(54)$ として知られている．

また，上と同様の2次元トーラス T^2 を使い，それを $\boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}$ という反転で割ることで，特異点が4つある T^2/Z_2 オービフォルドを構成することができる．その4つの特異点を入れ換える対称性が前節で説明した S_4 であり，4つの特異点に巻き付いた弦を区別する対称性 $Z_2\times Z_2$ があり，全体の対称性は，S_4 と $Z_2\times Z_2$ を含んだ大きな群となっている[9]．

これまでは，オービフォルド上のヘテロ型弦模型の話をしてきたが，他の弦理論においても似たような対称性を示すものがある．例えば，交差したD-ブレーンや背景磁場をもつD-ブレーンをもつ弦模型に関しては，コンパクト空間は特異点のない n 次元トーラスだとしても，クォーク，レプトンに対応するモードがトーラス上に（準）局在化していて，それらを入れ換える対称性等が上のオービフォルドの場合と同様に存在し，上で紹介したものと似たような対称性をもつことが知られている[10]．

4. レプトンフレーバー混合

弱い相互作用は，電荷をもつ3種類のレプトン (e,μ,τ) とそれぞれ対応するニュートリノ (ν_e,ν_μ,ν_τ) を入れ換えるような相互作用である．電弱対称性が破れた後では，電荷をもつレプトンやニュートリノはそれぞれ以下の質量項をもつ．

$$\bar{l}_R M_l l_L+\frac{1}{2}\bar{\nu}^c M_\nu \nu + h.c.\ .$$

ここで，$l=(e,\mu,\tau)^T$, $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ で，それぞれの質量 M_l, M_ν は，独立な (3×3) 行列であり，一般に世代間で混ざっている．このそれぞれの質量行列を対角化する基底を考える．

$$U_l^\dagger M_l M_l^\dagger U_l=\mathrm{diag}(m_e^2,m_\mu^2,m_\tau^2),$$
$$U_\nu^T M_\nu U_\nu=\mathrm{diag}(m_1,m_2,m_3).$$

一般には，質量行列 M_l と M_ν は異なるので，対角化行列 U_l と U_ν も異なり，

$$U_{PMNS}=U_l^\dagger U_\nu$$

で定義されるフレーバー混合も単位行列と異なり，フレーバー混合が起きる．この混合行列は，(3×3) のユニタリー行列であり，以下のように表される．

$$U_{PMNS}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_{23}&\sin\theta_{23}\\0&-\sin\theta_{23}&\cos\theta_{23}\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\cos\theta_{13}&0&\sin\theta_{13}e^{-i\delta}\\0&1&0\\-\sin\theta_{13}e^{i\delta}&0&\cos\theta_{13}\end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ -\sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このようなレプトンセクターの混合角は，ニュートリノ振動の実験により測られていて（3σ の範囲で）[11] 以下のような値である．

$$\begin{aligned} &0.27 \le \sin^2\theta_{12} \le 0.37, \\ &0.36 \le \sin^2\theta_{23} \le 0.68, \\ &0.017 \le \sin^2\theta_{13} \le 0.033. \end{aligned} \tag{1}$$

このように，大きな混合角となっている．この様子は，クォークセクターでの混合角とはかなり異なる結果である．

この実験結果は，レプトンで世代間の混合が大きく起こっていることを示していて，そのような混合角の背後には，世代間を回す対称性があるのではないかと思われており，最近盛んに非可換離散フレーバー対称性が研究されている．

例えば，その考え方は以下の通りである．もともと大きなフレーバー対称性 G_f があったとしよう．もちろん，そのような対称性は実験的には見えていないので，それが破れたとする．その破れ方で，電荷をもつレプトンセクターにはある対称性 G_l が残り，ニュートリノの質量行列には，G_ν が残ったとする．つまり，

$$\begin{aligned} &g_l^T M_l M_l^\dagger g_l^* = M_l M_l^\dagger, \quad g_l \in G_l, \\ &g_\nu^T M_\nu g_\nu = M_\nu, \quad g_\nu \in G_\nu. \end{aligned}$$

G_l, G_ν が非可換対称性であると世代間で完全に縮退した質量が現れるはずであるが，それは実験事実と異なるので，残った対称性は可換群 Z_N やその積である．

例えば，G_l は Z_3 対称性とし，その一つの要素 g_l を

$$g_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，これを対角化する行列は

$$U_l^\dagger g_l U_l = \mathrm{diag}(1, \omega^2, \omega),$$

$$U_l = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで，$\omega = e^{2\pi i/3}$ である．この U_l は，$M_l M_l^\dagger$ を同時に対角化することが分かる．

一方で，g_ν のほうは，マヨラナニュートリノを考えると $(g_\nu)^2 = 1$, $\det g_\nu = 1$ を満たすべきで，$Z_2 \times Z_2$ 対称性に含まれる．例えば，

$$g_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g'_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

で生成される対称性 G_ν をもつとする．g_l 同様，上の g_ν, g'_ν は

$$U_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

で対角化でき，そのような対称性をもつニュートリノの質量行列 M_ν も U_ν で対角化できる．従って，このような場合混合行列は

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

を導く．この結果は，$\sin^2\theta_{12} = 1/3$, $\sin^2\theta_{23} = 1/2$ を導き，興味深い混合行列のパターンである．

もし，この議論が正しければ，もともとのフレーバー対称性 G_f は，g_l, g_ν, g'_ν を含むようなものであろう．例えば，2 節で紹介した S_4 はこのような要素を含む非可換離散対称性である．このような S_4 を含むようなフレーバー対称性 G_f をより基本的な理論が含むのではないかと想像され，興味深い．しかしながら，最近のニュートリノ振動の実験結果 (1) はゼロでない $\sin^2\theta_{13}$ を示し，上

のパターンの予言と一致しない．従って，上の議論に何らかの変更が必要であり，現在様々な提案がなされている．

5. まとめ

ここでは，最近研究されている有限群の素粒子論への応用を簡単に紹介した．一つのトピックは，コンパクト空間上の超弦理論において，特定の非可換離散対称性が世代間を関係付けるフレーバー対称性として現れることが認識されるようになったことである．もちろん，クォーク・レプトンの質量や混合角の実験値には，そのような対称性は見られないので，非可換フレーバー対称性はどこかの段階で破れていなければならない．

もう一つのトピックは，レプトンセクターの大きな混合角を導出するため，ボトムアップ的アプローチとして，有限群を応用し，様々な模型構築が提案されている．ここでは，レプトンセクターのみ紹介したが，クォークの質量や混合角に有限群を使い，説明を試みる研究も盛んに議論されている．このような有限群によるクォーク・レプトン質量と混合角の研究は最近非常に盛んに議論されていて，様々な有限群が使われているが，模型構築としては百花繚乱であり，実験等を使って，唯一のフレーバー模型を選び出せるような段階にはない．

このように，トップダウン的アプローチとボトムアップ的アプローチの双方において，多くの研究者が有限群を応用し，フレーバー構造の謎の解明に挑んでいる．現在，超弦理論と低エネルギーのフレーバー構造を結びつけるような確固としたシナリオは分かっていない．今後，上述の２つのアプローチを相補的に進めフレーバーの起源を解明していくことが非常に重要な課題である．

参考文献

1) G. Altarelli and F. Feruglio, arXiv:1002.0211 [hep-ph].
2) H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Shimizu, H. Okada and M. Tanimoto, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **183** (2010) 1 [arXiv:1003.3552 [hep-th]].
3) H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, H. Okada, Y. Shimizu and M. Tanimoto, "An introduction to non-Abelian discrete symmetries for particle physicists," *Lect. Notes Phys.* **858**, 1 (2012).
4) P.O. Ludl, arXiv:0907.5587 [hep-ph].
5) M. Hamermesh, "Group Theory and its Application to Physical Problems," Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.
6) H. Georgi, "Lie Algebras In Particle Physics. From Isospin To Unified Theories," *Front. Phys.* **54**, 1 (1982).
7) P. Ramond, "Group Theory: A Physicist's Survey", Cambridge University Press, 2010.
8) T. Kobayashi, S. Raby and R.-J. Zhang, *Nucl. Phys. B* **704**, 3 (2005) [hep-ph/0409098].
9) T. Kobayashi, H.P. Nilles, F. Ploger, S. Raby and M. Ratz, *Nucl. Phys. B* **768**, 135 (2007) [hep-ph/0611020].
10) H. Abe, K.-S. Choi, T. Kobayashi and H. Ohki, *Nucl. Phys. B* **820** (2009) 317 [arXiv:0904.2631 [hep-ph]].
11) D.V. Forero, M. Tortola and J.W.F. Valle, *Phys. Rev. D* **86**, 073012 (2012) [arXiv:1205.4018 [hep-ph]].

（こばやし・たつお，京都大学大学院理学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

小山 照夫

1983年7月号

1980年代は，新しい情報処理パラダイムを実現する手段として，人間の知識を計算機に利用させる知識ベースシステムが注目され，試験的開発が進められた時代であった．とりわけ早い時期から研究が行われてきた医療応用への期待は大きかったと言える．

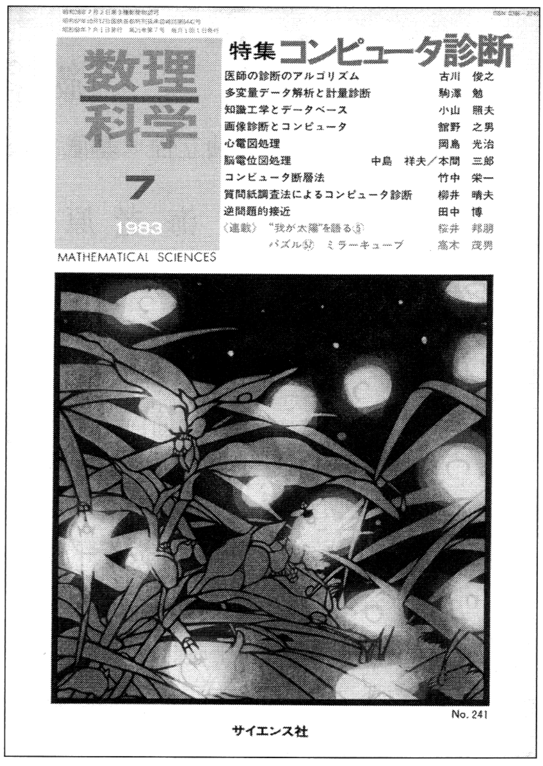
しかし一方で知識情報を計算機が適切に利用できるようにするための情報整理の難しさも指摘されており，実用化のためには大規模知識ベースの構築技術を確立することが重要であることも認識され始めていた．

これらの流れを受けて，1990年代には大規模知識ベース構築を目指す，国内外の多くのプロジェクトが推進されることになる．米国では百科事典的知識ベースの構築を目指すCYCが著名であるし，国内でも大規模な概念辞書の構築を目指すEDRプロジェクトが進められた．医学分野では米国NIH（National Institutes of Health）が主導したUMLS（Unified Medical Language System）の試みがある．

しかしながら計算機で利用可能な，大規模で整合性のある知識ベースを構築するという視点からすると，結果としてこれらの試みは成功したとは言い難く，現在に至るまで人間を支援する知識処理システムは極めて限定されたものに留まっている．

大規模な知識ベースを構築する上での問題として，日本語や英語などの自然言語を使用するにあたっての文脈／状況の役割が十分に解明されていないことが挙げられるであろう．

人間が自然言語を用いて情報を記述しようとするとき，その状況，あるいは文脈が非常に大きな役割を果たしており，文脈上当然了解可能な情報は実際に記述されることはないし，そこで省略が生じたこと自体が意識されることさえまれである．しかも人間にとって文脈の範囲内で正しく全体を理解できる記述は一義的に定まるものではなく，記述者の視点に依存した複数の記述が可能である．結果として知識記述者が異なると，同じ知識内容を記述したつもりでもその形式は全く異なるという事態が頻出することになる．



これまでの計算機環境と処理手法を前提とする限り，直接知識面から人間を支援する実用システムの実現には未だ多くの課題が残されていると言える．

一方で，知的支援技術の実用化をより広く捉えるなら，計算機技術の新しい動向が，従来とは異なる可能性をもたらしつつあるように思われる．近来急速に普及しつつある携帯型端末は，知識支援が有効となる局面を増やす結果，多様な実用システムの可能性を開くと期待される．また携帯端末上で応用が進められている自然言語インタフェース研究が，言語使用の文脈性と知識記述について新しい知見をもたらす可能性もある．新しい視点からの知識活用技術の展開に期待したい．

（こやま・てるお，国立情報学研究所）

大学院入試問題からみた 大学の数学

数学のより深い理解を目指す

第7回

線形代数 4

線形独立性・基底・次元 — あるいは解法の探求

海 老 原　円・太 田　雅 人

7.1 線形独立性

この連載も 7 回目を迎えた．線形代数に関する問題を取り上げるのも 4 回目になる．今回は，ベクトルの線形独立性（1 次独立性）や，線形空間の基底・次元に関する問題を取り上げる．

まず，線形独立性を判定する問題から考察する．

問題 7.1 （筑波大学大学院博士課程システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻博士前期課程，平成 21 年度） 次のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a+1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ a+1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1)　$a = -2$ のとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形独立となるか調べよ．

(2)　$a = -2$ のとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が線形独立となるか調べよ．

(3)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が線形独立となるための a の必要十分条件を求めよ．

解答例　(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べた行列 $A = (\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\,\boldsymbol{a}_3)$ を考える．$a = -2$ のとき，行列 A に基本変形をほどこす：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1 \\ R_4+R_1}]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4+R_2]{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

これより A の階数が3であることが分かる．これは A の3つの列ベクトルが線形独立であることを意味する．すなわち $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は線形独立である（以下，記号 $R_i + cR_j$ は行列の第 i 行に第 j 行の c 倍を加える変形を意味するものとする：連載第3回参照）.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ を並べた行列 $B = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3\, \boldsymbol{a}_4)$ を考える．$a = -2$ のとき，行列 B に上の小問 (1) と同様の基本変形をほどこすと，行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が得られる．このことより B の階数が3であることが分かる．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は線形独立でない.

(3) $B = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3\, \boldsymbol{a}_4)$ の行列式を計算すると

$$
\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & a+1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}
\underset{\substack{R_3-R_1 \\ R_4-(a+1)R_1}}{\overset{R_2-R_1}{=}}
\begin{vmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ 0 & -a-1 & a & -a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -a^2-a+1 & -a & -a^2-2a-2 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} -a-1 & a & -a \\ 1 & 0 & -1 \\ -a^2-a+1 & -a & -a^2-2a-2 \end{vmatrix}
\overset{R_3+R_1}{=} \begin{vmatrix} -a-1 & a & -a \\ 1 & 0 & -1 \\ -a(a+2) & 0 & -(a+1)(a+2) \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{(**)}{=} -a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a(a+2) & -(a+1)(a+2) \end{vmatrix} = a(a+2)(2a+1)
$$

が得られる．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が線形独立であるための必要十分条件は，$\det B \neq 0$ となること，すなわち，a が $0, -2, -\dfrac{1}{2}$ のいずれとも異なることである（上の式変形において，$(*)$ の部分は第1列に関する展開，$(**)$ は第2列に関する展開をほどこしている）.

解答終わり

まず，線形独立の定義を復習しておく．K は体とし，V は K 上の線形空間とする．V の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が次の条件 (P) を満たすとき，これらの元は**線形独立**であるという.

> **(P)**：$c_1, c_2, \cdots, c_k \in K$ が $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$ を満たすならば，$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ である.

線形独立という概念は初学者にとって難しいようである．それは，この定義の文章 (P) が「(A) ならば (B)」という論理構造を持っているからであろう．直観的・視覚的なイメージのみに頼ってこれを理解しようとすると，うまくいかない．たとえて言うなら，それは，教員が「学生の顔を見る」という直観的・視覚的な方法で自分の授業の定着度を計ろうとしても，なかなかうまくいかないことに似ている.

教員はそこで**テスト**を行うことになる．テスト（仮定 (A)）に対する学生の回答が正答（結論 (B)）ならば合格というわけである．$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ を漫然と眺めていても，全くらちがあかないので，それらの線形結合を作ってそれが $\boldsymbol{0}$ になったと**仮定**することから出発し，「$c_1 = \cdots = c_k = 0$」という**結論**が出たならば，テストは合格，つま

り，これらが線形独立であることが分かる，という仕組みになっている．

ところで，いま仮に，問題 7.1 の小問 (1) が「$a=-2$ のとき，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立であることを示せ」という文面であったとしよう．読者が採点者なら，次の答案には何点与えるであろうか．

答案例―疑わしきは罰するか？

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を満たす実数 c_1, c_2, c_3 は $c_1=c_2=c_3=0$ のみであるので，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は線形独立である．

解答終わり

善意に解釈すれば，$c_1=c_2=c_3=0$ を示すためには単に連立 1 次方程式を解くだけでよいので，細かい計算を省略したということであろう．しかし，実際には方程式を解かずに，当然予想される結論を書いただけかもしれない．

解答者の立場からすると，このような答案は，起点と終点とを単につなぎ合わせただけの「中抜きのキセル乗車」であると判定される可能性があるので，それを避けるためにも，長くなることをいとわず，計算の過程をきちんと書くべきである．

さて，最初に掲げた解答例においては，定義から直接示す方法をとっていない．問題 7.1 の (1), (2) については，次の命題を利用している．

命題　行列 A の階数は，A の線形独立な列ベクトルの本数の最大値と一致する．A の線形独立な行ベクトルの本数の最大値とも一致する．

この命題によれば，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の線形独立性を判定するには，行列 $A=(\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_k)$ の階数を調べればよいことになる．A の階数が k ならば $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ は線形独立であり，階数が k 未満ならば線形従属である．

階数の計算は，実際に方程式を解くよりも，答案をコンパクトにまとめられるのが強みである．連立 1 次方程式を解くための式変形から，その係数の並びの変遷だけを抜き出したものが，行列の行基本変形にほかならないからである．

小問 (3) については，$B=(\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_4)$ が**正方行列**であるので，その行列式を計算することによって，列ベクトルの線形独立性を調べている．これは次の命題に基づく．

命題　k 次**正方行列** $A=(\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_k)$ について，A の k 個の列（行）ベクトルが線形独立であることと，$\det A\neq 0$ であることとは同値である．さらにそれは，A が正則行列であることとも同値であり，A の階数が k であることとも同値である．

一般に，その成分が変数を含む正方行列の列ベクトルの線形独立性を判定するには，行や列を完全に掃き出して階数を調べるよりも，行や列をある程度掃き出しつつ，適宜，展開などもおこなって行列式を求めるほうが，計算はスムーズである．

線形独立性に関する問題をもう 1 題考えよう．

問題 7.2　（京都大学大学院情報学研究科修士課程複雑系科学専攻，平成 21 年度）
V を複素ベクトル空間とし，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in V$ が 1 次独立であるとする．α を複素数とするとき，

$$x_1 - \alpha x_2,\ x_2 - \alpha x_3, \cdots, x_{n-1} - \alpha x_n,\ x_n - \alpha x_1$$

が V で 1 次独立であるための，α に関する必要十分条件を求めよ．

解答例　m を自然数とし，n 次正方行列 $A(\alpha, n, m) \in M(n, n; \mathbb{C})$（$M(n, n; \mathbb{C})$ は n 次複素正方行列全体の集合）を

$$A(\alpha, n, m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha^m \\ -\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

と定める．すなわち，$1 \leq i, j \leq n$ なる自然数 i, j に対して

$$A(\alpha, n, m) \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}), \\ -\alpha & (i = j + 1 \text{ のとき}), \\ -\alpha^m & (i = 1,\ j = n \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

と定める．また，$y_1 = x_1 - \alpha x_2, y_2 = x_2 - \alpha x_3, \cdots, y_n = x_n - \alpha x_1$ とおくと，x_1 から x_n までを形式的に横ベクトルのように並べたものと，y_1 から y_n までを並べたものの間には，次のような関係式が成り立つ：

$$(y_1, \cdots, y_n) = (x_1, \cdots, x_n) A(\alpha, n, 1).$$

よって，複素数 $c_1, \cdots, c_n$ に対して

$$(y_1, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (x_1, \cdots, x_n) A(\alpha, n, 1) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

が成り立つ．これは $y_1, \cdots, y_n$ の線形結合を $x_1, \cdots, x_n$ の線形結合に変換する式であると考えることができる．

このとき，$y_1, \cdots, y_n$ が 1 次独立であることは，$A(\alpha, n, 1)$ が正則行列であることと同値である．

実際，$A(\alpha, n, 1)$ が正則行列でないならば，複素数 $c_1, \cdots, c_n$ であって，$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，かつ $A(\alpha, n, 1) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ となるものが存在するが，この

$c_1, \cdots, c_n$ を上の式 $(*)$ に代入すれば，右辺が 0 となることより，左辺も 0 である．すなわち，少なくともどれか 1 つは 0 でない複素数 $c_1, \cdots, c_n$ に対して

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n = 0$$

が成り立つことになる．これは $y_1, \cdots, y_n$ が 1 次従属であることを意味する．

一方，$A(\alpha, n, 1)$ が正則行列であるとするとき，複素数 $c_1, \cdots, c_n$ が $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$ を満たすならば，この $c_1, \cdots, c_n$ に対して式 $(*)$ の左辺は 0 となるが，右辺（$=0$）が $x_1, \cdots, x_n$ の線形結合であり，さらに $x_1, \cdots, x_n$ が 1 次独立であることより，その係数はすべて 0 でなくてはならない．すなわち $A(\alpha, n, 1)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つ．$A(\alpha, n, 1)$ は正則行列であるとしているので，このような $c_1, \cdots, c_n$ はすべて 0 でなくてはならない．よって $y_1, \cdots, y_n$ は 1 次独立である．

そこで $f(\alpha, n, m) = \det A(\alpha, n, m)$ とおくと，$n \geq 3$ のとき

$$f(\alpha, n, m) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha^m \\ -\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2 + \alpha R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha^m \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha^{m+1} \\ 0 & -\alpha & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1 \end{vmatrix} = f(\alpha, n-1, m+1)$$

が成り立つ（最後の式変形は第 1 列に関する展開を用いた）．よって，$n \geq 2$ のとき

$$\det A(\alpha, n, 1) = f(\alpha, n, 1) = f(\alpha, 2, n-1) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha^{n-1} \\ -\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha^n$$

となる．よって $y_1, \cdots, y_n$ が 1 次独立であるための必要十分条件は，$\alpha^n \neq 1$ であること，すなわち $\alpha = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ の形でないことである．

解答終わり

7.2 基底，次元

副題にもあるように，今回はさまざまな解法の検討を試みている．「解法の探求」などと書くと，「数学の本質をないがしろにして，受験のためのテクニックのような低俗なものを語るのか？」といぶかる向きもあるかもしれない．しかし，「テクニック」は「物事の本質」から離れて存在するのではない．今回扱う線形独立性や基底・次元といった概念をめぐっては，いろいろなことがらが有機的に絡み合っている．それら

を総合的に理解することによって生み出されるテクニックであれば，それは肯定的にとらえられてしかるべきであろう．

次の問題に移ろう．

問題 7.3（名古屋工業大学大学院工学研究科，平成 20 年度）次の (1)〜(4) の問いに答えよ．

(1) 写像 $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ が $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 2x-3z\\ 5x+y^2\end{pmatrix}$ として与えられているとき，この写像は線形か．

(2) $\mathbb{R}^5$ の部分空間

$$V=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ s\\ t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^5\ \middle|\ \begin{array}{l} x-2y+2z+s-t=0,\\ 2x-4y+5z+4s-3t=0,\\ -3x+6y-4z+s+t=0\end{array}\right\}$$

の基底を 1 組挙げ，V の次元を述べよ．

(3) (2) で与えた $\mathbb{R}^5$ の部分空間 V を定義域とする線形写像 $G:V\to\mathbb{R}^3$ が $V\ni\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ s\\ t\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 4x-8y-9s\\ z+2s+5t\\ 2z+s+2t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ として与えられているとき，この写像の核の次元を求めよ．

(4) (3) で与えられた線形写像 $G:V\to\mathbb{R}^3$ の像の次元を求めよ．

解答例 (1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ とおくと，$F(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}$, $F(2\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} 0\\ 4\end{pmatrix}\neq 2F(\boldsymbol{a})$ となるので，F は線形写像でない．

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 5 & 4 & -3\\ -3 & 6 & -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$ とおき，行基本変形をほどこす：

$$A\ \xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-2R_1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 4 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-2R_2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

ここで $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ とおけば，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5$ に対して $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ と $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は同値であるので，$V=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\,|\,B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ である．そこで，連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解くと，紙面の関係で詳細は省略するが，一般解が $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{p}+\beta\boldsymbol{q}+\gamma\boldsymbol{r}$ で与えられることが分かる．ここで，α,β,γ は任意定数であり，

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

である．このことは，空間 V が 3 つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ で張られる（生成される）ことを意味する．また，検証は省略するが，これらの 3 つのベクトルは線形独立であるので，3 つのベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ は V の基底をなす．とくに V は 3 次元である．

(3) $C=\begin{pmatrix}4 & -8 & 0 & -9 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & 5\\0 & 0 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$ とおく．このとき，G の核 $\operatorname{Ker} G$ は

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} G &= \{\,\boldsymbol{x}\in V \mid C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}\\ &= \{\,\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^5 \mid B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \text{ かつ } C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}\\ &= \{\,\boldsymbol{x}\in \mathbb{R}^5 \mid M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}\end{aligned}$$

と書き直すことができる．ここで，行列 M の階数を求めると，これも詳細は省略するが，階数が 4 であることが分かる．

よって $\dim \operatorname{Ker} G = 5 - \operatorname{rank} M = 1$ である．（ここで $\operatorname{rank} M$ は M の階数を表す.）

(4) G の像の次元は，$\dim V - \dim \operatorname{Ker} G = 3 - 1 = 2$ である．　**解答終わり**

K は体とし，V, V' は K 上の線形空間とする．写像 $T: V \to V'$ が次の 2 つの条件を満たすとき，T は（K 上の）**線形写像**であるという：

(a) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$;
(b) 任意の $c \in K$ および任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $T(c\boldsymbol{x}) = cT(\boldsymbol{x})$.

問題 7.3 の小問 (1) については，F による像のベクトルの第 2 成分に y^2 という項があることから，F が線形写像でないことが見てとれる．

線形写像でないことを示すためには，上記の 2 条件のどちらか一方が成り立たない例を一つ提示すればよい．どのような例を挙げるかは自由であるが，なるべくなら簡単なものを選びたい．

小問 (2) については，V を連立 1 次方程式の解空間としてとらえるのがよい．**任意定数を無駄なく含むような一般解を求めることは，解空間の基底を求める作業にほかならないのであるが**，そういう認識があるかないかは，受験者の理解の度合いによる．「連立 1 次方程式を解け」といわれれば難なく解答できる者でも，「V の基底を求めよ」と問われると手が止まってしまう，ということがおうおうにして起こる．

小問 (3) はもう少し複雑であるが，ここでは，$\operatorname{Ker} G$ を V の部分空間としてとらえるのではなくて，$\mathbb{R}^5$ の部分空間としてとらえ直すことにより解答している．**一般に，(m,n) 型行列 M に対して，空間 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ の次元は $n-\operatorname{rank} M$ に等しいので**，解答は M の階数を求めることに帰着される．

小問 (4) は，小問 (3) の結果と次元公式 $\dim V = \dim \operatorname{Ker} G + \dim \operatorname{Im} G$ を用いることにより解答している．ここで $\operatorname{Im} G$ は G の像空間を表す．

小問 (3) を経由せずに (4) を解くことも可能である．以下に別解を示す．

問題 7.3 (3), (4) に対する別解　$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ は小問 (2) の解答例において求めた V の基底とする．一方，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．これは $\mathbb{R}^3$ の自然な基底をなす．写像 G による $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の像を計算すると

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{p}) &= 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_3, \\ G(\boldsymbol{q}) &= 3\boldsymbol{e}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3, \\ G(\boldsymbol{r}) &= -4\boldsymbol{e}_1 + 6\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

となるので，V の基底 $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \rangle$ および $\mathbb{R}^3$ の基底 $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$ に関する G の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ である．この行列の階数が 2 であることより（その確認は省略），$\dim \operatorname{Im} G = 2$ が分かる．さらに，次元定理より $\dim \operatorname{Ker} G = \dim V - \dim \operatorname{Im} G = 3 - 2 = 1$ である．

解答終わり

別解においてポイントとなるのは，次の命題である．

命題　線形写像 G の像の次元は，G の任意の表現行列の階数に等しい．

行列は線形写像の表現としてとらえることができる．表現行列そのものは線形空間の基底の選び方によって変わるが，その階数は基底によらず一定であり，それは線形写像の像空間の次元と等しい．したがって，**任意に基底を選んで，その基底に関する表現行列を求め，その階数を求めれば，線形写像の像空間の次元を求めることができる**．

7.3 おわりに

すべての試験問題は総合問題である．— これは一面において正しい命題であるが，今回はとくにその様相が濃い．今回のような問題に関していえば，問題とその解法との間に，「この種の問題にはこの解法を」というような「一対一の対応」がつくわけではない．これまでも繰り返し述べてきたことであるが，結局は，真摯に深く物事を理解しようとする勉学態度こそが求められる．

次回は複素解析に関する問題をふたたび取り上げる．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

例題形式で探求する 微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第4回

関数とベクトル場(2)

森田 茂之

4.1 発散と回転

前回，与えられた関数 f に対して，その勾配ベクトル場 $\mathrm{grad}\, f$ を定義した．これは，ベクトル場の最も重要な例である．今回は，関数とベクトル場に関わるあと 2 つの重要な演算である，発散と回転を定義する．

まず発散を定義しよう．$\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級のベクトル場 X が与えられたとしよう．X を成分で

$$X = (u_1, \cdots, u_n)$$

と表しておく．ただし u_i $(i = 1, \cdots, n)$ は U 上の関数である．このとき X の**発散**（divergence）と呼ばれるスカラー場（すなわち関数）$\mathrm{div}\, X$ を

$$\mathrm{div}\, X = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$$

により定義する．

例 4.1 前回に挙げた，平面上のベクトル場の簡単な 3 つの例に対し，それらの発散を計算してみよう（図 4.1 参照）．

$$\text{(i)}\ X(x,y) = (x,y) \ \Rightarrow\ \mathrm{div}\, X = 2,$$
$$\text{(ii)}\ X(x,y) = (-y,x) \ \Rightarrow\ \mathrm{div}\, X = 0,$$
$$\text{(iii)}\ X(x,y) = (y,x) \ \Rightarrow\ \mathrm{div}\, X = 0.$$

定義自身，およびこれらの例からある程度想像できるように，発散の物理的な意味は “わきだし” である．すなわち，X がある流体の流れの速度ベクトル

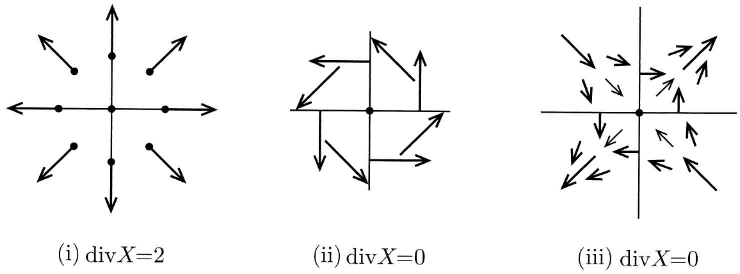


図 4.1　平面上のベクトル場の発散の例.

を表しているとき，単位体積から単位時間あたりに湧き出す量を表すのである．発散の値はもちろん負にもなるが，その場合は言わば “すいこみ” ということになる．例 4.1 (i) を見ていただきたい．発散の値は一定で 2 である．ベクトル場の形から，原点での “わきだし” が正であるのは当然である．さらにこのベクトル場は，原点から離れれば離れるほど勢いを増して，原点と正反対の方向に流れていく．この流れを維持するためには，各点で 2 の “わきだし” が必要ということを示しているのである（例 4.1 (iii) は “すいこみ” と “わきだし” が打ち消し合っている）．

$\operatorname{div} X = 0$ となるベクトル場 X を，“わきだしなし”，あるいは “発散なし” のベクトル場という．

次に回転を定義する．これは 3 次元（および 2 次元）に特有のベクトル場に対する演算である．X を $\mathbb{R}^3$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級のベクトル場とする．X を成分により

$$X = (u, v, w)$$

と表示しておく．ただし，u, v, w は U 上の関数である．このとき，U 上のベクトル場 $\operatorname{rot} X$ を

$$\operatorname{rot} X = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y)$$

とおくことにより定義する．これを X の**回転** (rotation) と呼ぶ．$\operatorname{curl} X$ と書く場合もある (2 次元の場合には $X = (u, v)$ に対し，スカラー場 $\operatorname{rot} X = v_x - u_y$ を X の回転と呼ぶ場合がある．これは X を用いて $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\widetilde{X}$ を $\widetilde{X} = (u, v, 0)$ により定義したとき，$\operatorname{rot} \widetilde{X}$ の z-成分に他ならない)．一つだけ例を挙げておく（例 4.1 (ii) も参照)．

例 4.2　$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $X = (-y, x, 0)$ に対し

$$\operatorname{rot} X = (0, 0, 2).$$

この例からある程度想像できるように，回転 $\operatorname{rot} X$ の物理的意味は，ベクトル場 X の “渦” を表すものである．すなわち U 上の各点 P において X の “渦” を見たとき，それが最も多くある方向を向き，その量を長さとするベクトルが $(\operatorname{rot} X)_P$ である．

$\mathrm{rot}\, X = \mathbf{0}$ となるベクトル場 X を，“渦なし”のベクトル場という．

ここで回転と，勾配および発散の関係について少し考察しよう．U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f : U \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．このとき f のグラフ $\varGamma_f = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})); \boldsymbol{x} \in U\}$ を U 上に建てた建物の屋根（あるいは地形の表面）と想定し，そこに雨が降ったと仮定しよう．雨は屋根の形に従って流れを作るが，屋根の各点におけるその速度ベクトルを考えることにする．これを $\varGamma_f$ から U に正射影すれば，U 上のベクトル場が得られる．これが $-\mathrm{grad}\, f$ に他ならない．さて $n = 2, 3$ の場合 f（従って屋根）が滑らかならば，雨は渦を作ることなく滑らかに流れることが期待されよう．こうして $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = \mathbf{0}$ が成立することが予想できる．同様の考察から $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X = 0$ であることも期待されよう．実際，これらの2つの等式が成立することは簡単に示すことができる．これらを例題とする．

例題 4.1（**“勾配は渦なし”**） $\mathbb{R}^3$（あるいは $\mathbb{R}^2$）の開集合 U 上で定義された C^∞ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = \mathbf{0}$$

であることを示せ．

解答 $U \subset \mathbb{R}^3$ の場合を証明する（$U \subset \mathbb{R}^2$ の場合はさらに簡単である）．定義に従って計算すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f &= \mathrm{rot}(f_x, f_y, f_z) \\ &= (f_{xy} - f_{yx}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

となり，確かに等式が成立することが分かる．証明から分かるように，この等式は関数 f が C^2 級であれば成立する．

例題 4.2（**“回転はわきだしなし”**） $\mathbb{R}^3$ の開集合 U 上の C^∞ 級のベクトル場 X に対し，

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X = 0$$

であることを示せ．

解答 X を成分を用いて $X = (u, v, w)$ と表す．このとき，定義に従って計算すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, X &= \mathrm{div}(w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) \\ &= w_{yx} - v_{zx} + u_{zy} - w_{xy} + v_{xz} - u_{yz} \\ &= 0\end{aligned}$$

となり，確かに等式が成立することが分かる．証明から分かるように，この等

式はベクトル場 X が C^2 級であれば成立する．

逆に

渦なしのベクトル場はある関数の勾配として書けるか？

わきだしのないベクトル場はあるベクトル場の回転として書けるか？

という問いが自然に生まれる．$U=\mathbb{R}^3$ についてはこれは正しく，さらに U に関するある幾何的な条件を仮定すれば成立することが分かる．詳しくは，線積分のより詳しい考察をした後に，その応用として議論することにする．

4.2 微分演算子を成分とするベクトル

前節までに，関数 f に対して勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ を，そしてベクトル場 X に対しては発散 $\operatorname{div} X$ と，回転 $\operatorname{rot} X$（ただし $n=3$ の場合）を定義した．これらの演算を統一的に扱うために，次のような微分演算子を成分に持つベクトル

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

を導入すると便利なことが多い．このベクトルは "ナブラ" と呼ばれる．このとき

$$\operatorname{grad} f = (f_{x_1}, \cdots, f_{x_n}) = \nabla f,$$
$$\operatorname{div} X = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = \nabla \cdot X$$

と簡明に書けることになる．ただし，第2式で $\nabla \cdot X$ は ∇ と X の内積を表す．次に $n=3$ の場合は

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z)$$
$$X = (u, v, w) = (X_x, X_y, X_z)$$

と記すと

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} X &= (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y) \\ &= (\nabla_y X_z - \nabla_z X_y, \nabla_z X_x - \nabla_x X_z, \nabla_x X_y - \nabla_y X_x) \\ &= \nabla \times X\end{aligned}$$

と書けることになる．ただし，$\nabla \times X$ は3次元ベクトルとしての ∇ と X の外積を表す．ここで念のために外積の定義を書いておく．2つの3次元横ベクトル

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

に対して

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

と定義する（外積は，線形代数学では 3 次元縦ベクトルに対して定義することも多いが，本質的には同等である）．

次に関数 f に対して

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{grad} f &= \operatorname{div}(f_{x_1}, \cdots, f_{x_n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f \end{aligned}$$

より，div grad は前に定義したラプラシアン Δ と等しいことが分かる．またこの作用素は

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

といろいろな書き方ができることになる．

例題 4.3 複素数変数 $z = x + iy$ を考え，負でない各整数 m に対し，z^m の実部，虚部をそれぞれ $\varphi_m(x, y) = \mathrm{Re}\,(z^m), \psi_m(x, y) = \mathrm{Im}\,(z^m)$ とする．このとき，$z^m = \varphi_m(x, y) + i\psi_m(x, y)$ であるが，φ_m, ψ_m を x, y に関する 2 変数関数と見たとき，それらはすべて調和関数となることを示せ．次に，$\Delta f = 0$ となるような 2 変数の多項式 $f(x, y)$ は，すべてこれらの一次結合として書けることを示せ．

解答 前半の主張は，この解答のすぐ後に記すように，複素微分や正則関数の考えを使えば，より一般的な形で証明することができる．しかし，ここではまず初等的な証明を与えよう．

任意の m に対して等式

$$(*)_m \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \frac{\partial \psi_m}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_m}{\partial x}$$

が成立することを m に関する帰納法により示そう．$m = 0$ のとき，$\varphi_0 = 1$, $\psi_0 = 0$ であるから，$(*)_0$ は成立する．$(*)_0, \cdots, (*)_m$ が成立すると仮定して，$(*)_{m+1}$ を証明しよう．

2 つの等式

$$\begin{aligned} z^{m+1} &= \varphi_{m+1} + i\psi_{m+1}, \\ z^{m+1} &= (x + iy)(\varphi_m + i\psi_m) = (x\varphi_m - y\psi_m) + i(x\psi_m + y\varphi_m) \end{aligned}$$

を比較すれば

$$\varphi_{m+1} = x\varphi_m - y\psi_m, \quad \psi_{m+1} = x\psi_m + y\varphi_m$$

が得られる．これらの等式を x, y で偏微分すれば

$$\frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x} = \varphi_m + x\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} - y\frac{\partial \psi_m}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial y} = \varphi_m + y\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + x\frac{\partial \psi_m}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial y} = x\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} - \psi_m - y\frac{\partial \psi_m}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial x} = y\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \psi_m + x\frac{\partial \psi_m}{\partial x}$$

となる．ここで帰納法の仮定である $(*)_m$ が成立することを使えば，$(*)_{m+1}$ が成立することが分かる．こうして $(*)_m$ がすべての m に対して成立することが示された．

次に，$(*)_m$ から

$$\Delta\varphi_m = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y \partial x} = 0$$

となり，φ_m が調和関数であることが分かる．同様にして $\Delta\psi_m = 0$ であることも分かり，前半の証明が終わる．

後半を示そう．x, y に関する m 次の同次多項式全体の成すベクトル空間を P_m と書けば，ラプラシアンは線形写像

$$\Delta : P_{m+2} \to P_m \quad (m \geq 0)$$

を誘導する．P_m $(m \geq 0)$ の基底として $x^m, x^{m-1}y, \cdots, y^m$ が取れるので，次元は $m+1$ である．P_0, P_1 の元は明らかに Δ を施せば 0 となる．一方（詳しい議論は読者に委ねるが），具体的な対応

$$\frac{1}{(m+2)(m+1)}x^{m+2} \xrightarrow{\Delta} x^m, \quad \frac{1}{(m+1)m}x^{m+1}y \xrightarrow{\Delta} x^{m-1}y,$$
$$\frac{1}{m(m-1)}x^m y^2 - \frac{2}{(m+2)(m+1)m(m-1)}x^{m+2} \xrightarrow{\Delta} x^{m-2}y^2, \cdots$$

により，Δ は全射であることが分かる．従って，上記線形写像の核 $\mathrm{Ker}\,\Delta$ は 2 次元であることが分かる．前半で示したことから，それは $\varphi_{m+2}, \psi_{m+2}$ で生成されることになり，証明が終わる．

複素平面（ガウス平面とも言う）$\mathbb{C}$ の開集合 U で定義された，複素数 $z = x+iy$ を変数とする複素数値関数 $h(z)$ は，$h(\neq 0) \in \mathbb{C}$ が 0 に近づくときの極限

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{h(z+h)-h(z)}{h}$$

が存在するとき，$z \in U$ において（複素）微分可能であるという．U 上の各点で微分可能であるとき，f は U で**正則**（holomorphic）であるという．このような関数を**正則関数**（holomorphic function）という．

正則関数 $h(z)$ は，2 変数の（実 2 次元に値を取る）ベクトル値関数として，前に定義した意味で微分可能となることが簡単に分かる．しかし正則性はそれよりもずっと強い条件である．実際 h を実部と虚部に分けて $h = \varphi + i\psi$ と書けば，φ, ψ は，x, y に関する 2 変数の実数値関数となる．このとき，等式

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial z} = -i\frac{\partial h}{\partial y}$$

から，φ, ψ が方程式

$$(*)\quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

を満たすことが導かれる．これを**コーシー・リーマン方程式** (Cauchy–Riemann equation) と言う．実は h が正則であることと，それが 2 変数のベクトル値関数として微分可能，かつその実部および虚部が上記コーシー・リーマン方程式を満たすことは同値であることが比較的簡単に分かる．さらに深い事実として，正則関数の微分はまた正則であることが知られており，従って φ, ψ はいずれも C^∞ 級の関数となる．

これらの事実を使えば，上記と同じ議論により $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$ となることが導かれる．こうして，正則関数の実部および虚部はいずれも調和関数となることが分かった．

正則関数は，函数論と呼ばれる分野の主要な研究対象である．しかし，ここでは上記の基本的な事実のみを述べて，先に進むことにする．

4.3 いくつかの公式

この項では，3 つの演算 grad, div, rot に関わる公式をいくつか取り上げる．

例題 4.4 f, g を $\mathbb{R}^3$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級関数，X を $\mathbb{R}^3$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級のベクトル場とする．このとき，次の 3 つの等式が成立することを証明せよ．

(i) $\operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g$.

(ii) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \operatorname{grad} f \cdot X$.

(iii) $\operatorname{rot}(fX) = f \operatorname{rot} X - X \times \operatorname{grad} f$.

解答 まず (i) を示す．

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(fg) =& ((fg)_{x_1}, \cdots, (fg)_{x_n}) \\ =& (f_{x_1} g + f g_{x_1}, \cdots, f_{x_n} g + f g_{x_n}) \\ =& g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g.\end{aligned}$$

次に (ii) を示すために，$X = (u_1, \cdots, u_n)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fX) =& \operatorname{div}(fu_1, \cdots, fu_n) \\ =& ((fu_1)_{x_1}, \cdots, (fu_n)_{x_n}) \\ =& f(u_1)_{x_1} + f_{x_1} u_1 + \cdots + f(u_n)_{x_n} + f_{x_n} u_n \\ =& f \operatorname{div} X + \operatorname{grad} f \cdot X\end{aligned}$$

となり，与式が示された．

最後に (iii) を示す．$X = (u, v, w)$ とすれば

$$\operatorname{rot}(fX) = \operatorname{rot}(fu, fv, fw)$$

$$
\begin{aligned}
&=((fw)_y-(fv)_z,(fu)_z-(fw)_x,(fv)_x-(fu)_y)\\
&=(f_yw+fw_y-f_zv-fv_z,f_zu+fu_z-f_xw-fw_x,\\
&\quad f_xv+fv_x-f_yu-fu_y)\\
&=f\operatorname{rot}X-X\times\operatorname{grad}f
\end{aligned}
$$

となり，証明された．

ベクトル場 X に対し，その各成分にラプラシアン Δ を施したものをその成分と定義することにより得られるベクトル場を ΔX と書くことにする．すなわち

$$X=(u_1,\cdots,u_n)$$

と表示するとき

$$\Delta X=(\Delta u_1,\cdots,\Delta u_n)$$

である．

例題 4.5　X を $\mathbb{R}^3$ の開集合 U 上で定義された C^∞ 級のベクトル場とする．このとき，次の等式

$$\Delta X=\operatorname{grad}\operatorname{div}X-\operatorname{rot}(\operatorname{rot}X)$$

が成立することを証明せよ．

解答　$X=(u,v,w)$ と成分表示しておく．このとき，定義から

$$
\begin{aligned}
\Delta X&=(\Delta u,\Delta v,\Delta w)\\
&=(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz},v_{xx}+v_{yy}+v_{zz},w_{xx}+w_{yy}+w_{zz})
\end{aligned}
$$

である．一方，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\operatorname{div}X&=\operatorname{grad}(u_x+v_y+w_z)\\
&=(u_{xx}+v_{yx}+w_{zx},u_{xy}+v_{yy}+w_{zy},u_{xz}+v_{yz}+w_{zz})
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot}X)&=\operatorname{rot}(w_y-v_z,u_z-w_x,v_x-u_y)\\
&=(v_{xy}-u_{yy}-(u_{zz}-w_{xz}),w_{yz}-v_{zz}-(v_{xx}-u_{yx}),\\
&\quad u_{zx}-w_{xx}-(w_{yy}-v_{zy}))
\end{aligned}
$$

となる．上記 3 つの式から求める等式が従う．証明から C^2 級の X に対して成立することが分かる．

（もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授）

機械学習の情報幾何 (4)

EM アルゴリズムと変分ベイズ法

甘利 俊一

機械学習では，多くの場合確率論的な枠組みを使う．しかし，単純なパラメータの推定問題と違い，確率変数の多くが観測されない状況にあることが多い．その上で，観測された変数をもとに，推論を行うことになる．潜在変数と呼ぶ観測されない隠れ変数がある場合の統計的推論は，古くからの話題である．隠れマルコフモデルにおける，Baum–Welch のアルゴリズムや Viterbi のアルゴリズムは，音声認識その他で多用されている．Dempster, Laird, Rubin[1)]は，隠れ変数がある場合の統計的推論を EM アルゴリズムとして一般的に定式化した．その幾何学的な仕組みは，Csiszar と Tusnady[3)]が示した．本稿では，その仕組みを情報幾何の立場から明らかにする．

Bayes 推論は，未知のパラメータまでも確率変数と見ることで推論の枠組みを広げる．これについては，古くから議論があった．しかし，その情報幾何は本稿の最後でふれるように，これからの課題である．ここでは，変分 Bayes 法と呼ばれる，隠れ変数がある場合にも通用する近似手法を眺めてみたい．

23.1 隠れ変数のある統計モデル

確率変数 $\boldsymbol{x}$ がある分布族 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$ に従うとして，観測したデータ $\boldsymbol{x}$ をもとに分布を求めるのが推定である．ところが，確率変数は $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ のように 2 つの部分に分割され，$\boldsymbol{y}$ は観測できるものの $\boldsymbol{z}$ は観測できないとしよう．$\boldsymbol{z}$ を潜在変数または隠れ変数という．隠れ変数を含む確率分布がパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を用いて $M=\{p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})\}$ という分布族に従うとする．このとき，観測できる $\boldsymbol{y}$ だけを取り出した周辺分布は

$$p_Y(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta})=\int p\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}\right)d\boldsymbol{z} \tag{23.1}$$

である．ここから，通常の手続きに従って観測した $\boldsymbol{y}$ を用いて分布のパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を推定すればよい．しかし，多くの場合，元の分布 $p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta})$ は良い形をしていて推定は簡単であるが，周辺分布は (23.1) の積分を含むため複雑な形になり，推定が困難であるという問題が生ずる．

例えば，混合ガウス分布を考えよう．ガウス分布が k 個あり，j 番目 $(j = 1, 2, \cdots, k)$ のガウス分布は平均 μ_j に従うとしよう（分散も未知母数として良いが，ここでは一番簡単な例を述べる）．j 番目のガウス分布が選ばれて，y がここから発生する確率を w_j とする．このとき $x = (y, z)$ で y は観測され，z は y が何番目のガウス分布から発生したかを示す $\{1, \cdots, k\}$ の値を取る確率変数となる．$z = j$ は j 番目のガウス分布から y が生成されたことを示す．このとき，(y, z) の同時確率分布は簡単なガウス分布である．

$$p(y, z, \boldsymbol{\theta}) = \frac{w_z}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - \mu_z)^2\right\}. \tag{23.2}$$

z が観測できなければ，y だけの分布はこれを重ね合わせた混合ガウス分布

$$p(y, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum w_j \exp\left\{-\frac{(y - \mu_j)^2}{2}\right\} \tag{23.3}$$

になる．ここでの未知母数 $\boldsymbol{\theta}$ は w_j と μ_j の全体である．この推定は結構面倒である．隠れ素子（観測されない変数）を含むニューラルネットワーク，隠れマルコフモデルなど，多くのモデルがこの形をしている．

23.2 EM アルゴリズム

隠れ変数 z が分からないならこれを推定し，それを用いるのは単純なアイデアである．Dempster らはこれを EM（expectation-maximization）アルゴリズムとして定式化した．これを情報幾何の立場から考えたのは，Csiszar と Tusnady であり[2]，甘利たち[3,4]も同じ考えに行きついている．

EM アルゴリズムでは，まず変数 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ の確率分布全体の空間 $S = \{p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\}$ を考える．我々の対象であるパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ で指定される分布族（モデル多様体）は S に含まれる，$M = \{p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta})\} \subset S$ である．

通常の推定の場合，データ $\boldsymbol{x}$ が観測されたときに，このデータが指定する分布 $\hat{q}(\boldsymbol{x})$（データが多数あればその経験分布，指数型分布族であれば，$\boldsymbol{\eta}$ 座標で考えて十分統計量が指定する分布）を観測点と呼び，これをモデル M に射影して推定量を求めた．今の場合，$\boldsymbol{x}$ のうちで $\boldsymbol{y}$ はわかるが $\boldsymbol{z}$ は分からない．そこで，$\boldsymbol{y}$ は観測値で固定されるが $\boldsymbol{z}$ の分布は何でも良いような確率分布を考える．すなわち，$q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ を任意の条件付き確率として，確率分布 $\hat{q}(\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ を取り上げ，この分布の全体をデータ多様体（または観測多様体）と呼ぶ．これはデータ D が指定する多様体で，

$$D = \{\hat{q}(\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})\ ;\ q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) \text{ は任意}\} \tag{23.4}$$

と書ける（図 23.1）．$\hat{q}(\boldsymbol{y})$ は観測値が定める $\boldsymbol{y}$ の分布，例えば観測値が $\bar{\boldsymbol{y}}$ ならば $\hat{q}(\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{y}})$ である．多数の観測 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ がある場合，$\hat{q}(\boldsymbol{y})$ はデータの指定する経験分布，または十分統計量の指定する分布とする．この場合 $\boldsymbol{y}_i$ のそれぞれに隠れ変数 $\boldsymbol{z}_i$ が付くから，データの指定する分布の族は

$$q(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_n) = \frac{1}{n} \sum \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_i)\, q(\boldsymbol{z}_i | \boldsymbol{y}_i) \tag{23.5}$$

である．データ多様体は m 平坦であることがすぐにわかる．

観測で分かるのはデータ多様体 D である．そこで $q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ で決まるデータ多様体の一点と $\boldsymbol{\theta}$ の指定するモデル多様体の一点の間の KL ダイバージェンス

$$L[q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}), \boldsymbol{\theta}] = \int \hat{q}(\boldsymbol{y}) q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) \log \frac{\hat{q}(\boldsymbol{y}) q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})}{p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta})} d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{z} \tag{23.6}$$

を考える．これを最小にする点ををそれぞれ $\hat{q}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}), \hat{\boldsymbol{\theta}}$ とすれば，これは 2 つの部分多様体 D と M の間のダイバージェンスを最小にする 2 点である（図 23.1）．しかも，次の 2 つの定理が成立する．

定理 23.1 D と M のダイバージェンスを最小にする $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は，最尤推定に一致する．

定理 23.2 M の一点からデータ多様体 D への e 射影に対して，条件付き分布 $q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ と $\boldsymbol{z}$ の条件付き期待値は不変である．

証明 KL ダイバージェンスは

$$D[\hat{q}(\boldsymbol{y}) q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) : p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta})] = \int \Big[\hat{q}(\boldsymbol{y}) \int q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) \log q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{z} \\ - \hat{q}(\boldsymbol{y}) \int q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) \log p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{z} + \hat{q}(\boldsymbol{y}) \log \hat{q}(\boldsymbol{y}) \Big] d\boldsymbol{y} \tag{23.7}$$

のように書ける．ここで $\hat{q}(\boldsymbol{y})$ を経験分布とすれば，観測データを $D = \{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n\}$ として，$\hat{q}(\boldsymbol{y})$ に関する積分はデータを代入して和を取ればよい．$q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ を固定して，上式を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ を求める．これは $\hat{q}$ から M への m 射影であり，

$$L(\boldsymbol{\theta}|q) = \int q(\boldsymbol{z}|D) \log p(D, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{z} \tag{23.8}$$

を最大化する．$\boldsymbol{\theta}$ で微分すれば，$p(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{y}) p(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\theta})$ を用いると，

$$\int \frac{q(\boldsymbol{z}|D)}{p(\boldsymbol{z}|D, \boldsymbol{\theta})} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} p(D, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{z} = 0 \tag{23.9}$$

である．ここで，$\boldsymbol{\theta}$ を固定して $D[q : p]$ を $q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ について最小化する．$q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{z}$ についての確率分布であるから $\int q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{z} = 1$ という制約条件を付ければ，Lagrange 未定係数 λ を用いて微分することにより，

$$\int \left[\log \frac{q(\boldsymbol{z}|D)}{p(\boldsymbol{z}|D, \boldsymbol{\theta})} - \lambda \right] \delta q(\boldsymbol{z}|D) d\boldsymbol{z} = 0 \tag{23.10}$$

が得られる．すなわち，$\boldsymbol{\theta}$ を固定して $D[q : p]$ を最小にする q は $q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}) =$

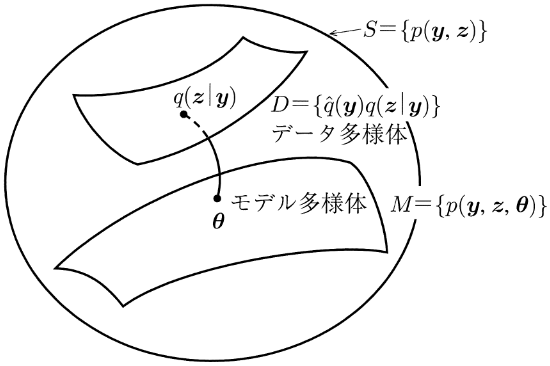


図 23.1　モデル多様体とデータ多様体.

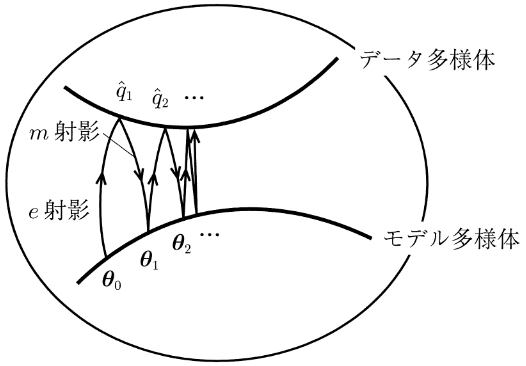


図 23.2　EM アルゴリズム.

$p(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta})$ である．これより，e 射影は条件付き確率を不変に保つことがわかる．

これを (23.7) に代入すれば，KL ダイバージェンスを最小にする $\boldsymbol{\theta}$ は

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\int p(D,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{z}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}p(D,\boldsymbol{\theta})=0 \tag{23.11}$$

を満たし，最尤推定と一致する．ただし，$p(D,\boldsymbol{\theta})$ は $\boldsymbol{\theta}$ に関して極大点や鞍点を持つかもしれないから (23.11) を満たす $\boldsymbol{\theta}$ は一意とは限らないことに注意.

さらに，このときの $q(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ をもとに観測値 $\boldsymbol{y}_i$ に対する隠れ変数 $\boldsymbol{z}_i$ の値が分布 $\hat{q}\,(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}_i)$ に従うと考えれば，それは $\boldsymbol{y}_i$ をもとに観測できなかった $\boldsymbol{z}_i$ の分布を推定することである．$\boldsymbol{z}_i$ 自身の推定値としては分布 $\hat{q}\,(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y}_i)$ による $\boldsymbol{z}$ の期待値を用いればよい.

推定値を算出する逐次アルゴリズムを考える．初期値として M 上の任意の値 $\boldsymbol{\theta}'$ を選ぶ．このとき，観測データ $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ が定めるデータ多様体に，分布 $p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}')$ を e 射影すれば，条件付き分布 $\hat{q}(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})=p(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\theta}')$ が得られる．こうして D 上の分布 $\hat{q}$ が定まる．次にこの点をモデル多様体に m 射影する.

これは $L\,(\boldsymbol{\theta}|\hat{q})$ を最大化することであるが，そのために対数尤度 $\log p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})$ の $\hat{q}$ で期待値を計算する．すなわち，前の推定値 $\boldsymbol{\theta}'$ から新しい $\boldsymbol{\theta}$ を求めるのに

$$L\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}'\right)=\int p\left(\boldsymbol{z}|D,\boldsymbol{\theta}'\right)\log p(D,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{z} \tag{23.12}$$

をまず計算する．対数尤度の条件付き期待値を計算するプロセスを E ステップ（expectation step）と呼ぶ．これは分布 $p\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}'\right)\in M$ を D に e 射影し，それを用いて対数尤度の期待値を取ることである．次は，対数尤度 $L\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}'\right)$ を $\boldsymbol{\theta}$ について最大化するので，これを M ステップ（maximization step）と呼ぶ．これは $\hat{q}$ を M へ m 射影することである．この意味で，EM アルゴリズムは e 射影と m 射影を繰り返す EM アルゴリズムと考えて良い（図 23.2）[5].

定理 23.3　e 射影と m 射影の繰り返しで KL ダイバージェンスは単調に減少する．したがって EM アルゴリズムは収束する.

ただ，モデル多様体 M は一般に e 平坦ではないから，ここへの m 射影は一意

とは限らない．このためアルゴリズムがいつも最尤推定に収束するとは限らない．ダイバージェンスの極小解はいくつかあるかもしれないので注意を要する．

ここで，一番単純な混合ガウス分布のパラメータ推定の例を示す．混合ガウス分布

$$p(y, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{w_i}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu_i)^2\right\} \tag{23.13}$$

を考える．未知パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ は，$\{w_i, \mu_i; i=1,\cdots,k\}$ である．簡単のため，

$$f(y, \mu_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu_i)^2\right\} \tag{23.14}$$

とおく．なお，各ガウス分布に異なる未知の分散項 σ_i^2 を導入しても，全く同じように議論できる．この分布で，データ x は (y,z) の組であり，(y,z) の同時分布は $p(y,z,\boldsymbol{\xi}) = w_z f(y, \mu_z)$ という簡単な形である．

いま，候補のパラメータが $\boldsymbol{\xi}'$ であるとして，E ステップを実行する．このため，条件付き確率と対数尤度 $l(x,z,\boldsymbol{\xi}) = \log p(y,z,\boldsymbol{\xi})$ を求めると，

$$p(z|x, \boldsymbol{\xi}') = \frac{w_z' f(y, \mu_z')}{p(y, \boldsymbol{\xi}')}, \quad l(x,z,\boldsymbol{\xi}) = \log w_z - \frac{1}{2}(x-\mu_z)^2 + c, \tag{23.15}$$

したがってその条件付き期待値は，定数項を省いて

$$L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') = \sum_z \frac{p(z|y, \boldsymbol{\xi}')}{p(y, \boldsymbol{\xi}')} \left\{\log w_z - \frac{1}{2}(y-y_z)^2\right\} \tag{23.16}$$

と書ける．ここまでが E ステップである．

M ステップは，$L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')$ を最大化する $\boldsymbol{\xi}$ を求め，$\boldsymbol{\xi}'$ を更新して $\boldsymbol{\xi}$ にすることで終わる．上式を $\boldsymbol{\xi}$ で微分して 0 と置けば，

$$w_z = \frac{1}{N} \sum p(z|y_i, \boldsymbol{\xi}'), \quad \mu_z = \frac{\sum_i y_i p(z|y_i, \boldsymbol{\xi}')}{\sum_i p(z|y_i, \boldsymbol{\xi}')} \tag{23.17}$$

となる．これが更新の式である．EM アルゴリズムについては文献 6, 7) などに詳しい．

23.3 変分 Bayes 法の情報幾何

EM アルゴリズムと一見似ている手法に，変分 Bayes 法がある[6~9]．これも，隠れ変数がある場合に良く用いられるので，ここで扱うのが良いだろう．しかし，Bayes 統計では，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の指定する確率分布の族 $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ に対して，これを指定するパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ もまた確率的に決まると考える．その分布を事前分布といい，$\pi(\boldsymbol{\theta})$ と書こう．このとき，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ とデータ $\boldsymbol{x}$ の同時確率分布は

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \pi(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) \tag{23.18}$$

と書ける．Bayes 統計では，データ $D = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ を観測した後で，パラ

メータ $\boldsymbol{\theta}$ の確率分布はどうなっているかを計算する．すなわち，(23.18) から，事後確率分布

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})=\frac{\pi(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})}{p(\boldsymbol{x})},\quad p(\boldsymbol{x})=\int\pi(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} \tag{23.19}$$

が計算できる．データが多数あるときは，$p(D|\boldsymbol{\theta})=\prod p\left(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\theta}\right)$ とし，$p(\boldsymbol{\theta}|D)$ を計算する．

Bayes 統計は，最尤推定 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{mle}}$ のようにパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を一点で推定するのではなくて分布として推定するため，より精密な推論ができると見ることもできる．この分布で，最も確率の高いものを選べば，これは

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MAP}}=\arg\max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta}|D) \tag{23.20}$$

で，事後確率を最大にする推定値となる．また，事前分布 $\pi(\boldsymbol{\theta})$ を一様分布とすれば，これは最尤推定に一致する．パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ をデータから推定すると $\boldsymbol{x}$ の確率分布が想定できるから，次に出るデータ $\boldsymbol{x}$ の確率を予測できる．このとき，点推定では，推定された分布 $p\left(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$ を使うが，Bayes 統計ではモデルを事後分布で平均した予測分布 $p(\boldsymbol{x}|D)=\int p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}|D)d\boldsymbol{\theta}$ を使うこともできる．

いま，隠れ変数を含む確率モデル $p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta})$ があるとしよう．データ $D=\{\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n\}$ を観測した後の事後分布は，隠れ変数とパラメータの両方を含む

$$p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})=\frac{\pi(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta})}{\int\pi(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{z}} \tag{23.21}$$

の形で書ける．データ $\boldsymbol{y}$ が多数あるときは，$\boldsymbol{y}$ の代わりに D を代入するが，このとき $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ に対応して隠れ変数も $\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_n$ のように多数あることに注意．ここで，分母の項 $p(\boldsymbol{y})=\int\pi(\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{\theta}$ は $\boldsymbol{y}$ の周辺分布で，計算が困難なことが多い．変分 Bayes 法では，真の事後分布の計算を避けて，その代わりに近似を使う．すなわち，$\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{\theta}$ の同時確率分布で計算が比較的容易なものとして，新しいパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ で指定される $Q=\{q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\xi})\}$ という扱いやすい分布族を仮想的に考える．記号が煩雑になるのを避けるため，多くの場合 $\boldsymbol{\xi}$ を省略して書くことにする．また，すべてはデータ D をもとにする条件付き確率であるが，これも省略して書く．

変分 Bayes 法は，真の事後分布の代わりに，モデル Q に属する分布で，真のものに最も近いものを採用し，これを事後分布の近似とする．したがって，それはモデル Q の選び方に依存する．多くの場合，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と隠れ変数 $\boldsymbol{z}$ の同時確率分布として，データで条件づけられたときに独立であるような分布モデルを Q として採用する．これは計算が便利であるからであるが，多くの場合これで良い近似が得られる．真の事後分布 $p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}|D)$ を Q に属する分布で近似するのに，KL ダイバージェンス

$$D_{KL}\left[q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}):p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}|D)\right] \tag{23.22}$$

を基準として用いる．最尤推定では，その逆である $D_{KL}[p:q]$ を用いてこれ

を最小化した．しかし，これは計算が困難である．特に，Q として独立な分布を用いたときには，(23.22) を用いると計算が楽になる．このとき，得られる分布 $\hat{q}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})$ は，真の条件付き分布から Q への e 射影である．

変分 Bayes 法では，隠れ変数の次元が高いときこれをさらにいくつかのブロックに分けて，$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_m)$ とし，これらもデータ取得後の条件付き分布は独立であるとする．また，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ もブロックに分けて，それぞれが事後には独立であるとして，モデル Q を作ることが多い．ここでは，簡単のためそれらについて述べないが，仕組みは同じである．

与えられた確率分布 $p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})$ を独立分布の族（正確にはパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ で指定される独立な事後分布の族）$Q=\{q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta})\}$ へ e 射影すると何が得られるかを見ておこう．簡単のため，条件 D を外して書く．

定理 23.4 同時確率分布 $p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})$ を，独立な確率分布の作る族 $Q=\{q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta})\}$ へ e 射影する．このとき KL ダイバージェンス $D_{KL}[q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta}):p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})]$ を最小にする点 q_z と q_θ は，c_z を規格化定数として

$$q_z(\boldsymbol{z}) = c_z\exp\left\{-D_{KL}\left[q_\theta(\boldsymbol{\theta}):p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})\right]\right\}, \tag{23.23}$$

$$q_\theta(\theta) = c_z\exp\left\{-D_{KL}\left[q_z(\boldsymbol{z}):p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})\right]\right\} \tag{23.24}$$

で与えられる．一方，m 射影することは $D_{KL}\left[p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}):q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta})\right]$ を最小にする分布を求めることであり，それは周辺分布で与えられる．

$$q_z(\boldsymbol{z})=\int p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta},\quad q_\theta(\boldsymbol{\theta})=\int p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{z}. \tag{23.25}$$

証明

$$D_{KL}\left[q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta}):p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})\right]=\int q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta})\log\frac{q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta})}{p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})}\,d\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{\theta} \tag{23.26}$$

を，関数 $q_z(\boldsymbol{z}),q_\theta(\boldsymbol{\theta})$ のそれぞれについて，$\int q_z(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}=1$, $\int q_\theta(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}=1$ の制約条件のもとで，変分を取る．$q_z(\boldsymbol{z})$ について変分を取れば，$\boldsymbol{z}$ に関係しない項を定数 λ に繰り入れて，

$$\delta D_{KL}=\int\delta q_z(\boldsymbol{z})\left[q_\theta(\boldsymbol{\theta})\log\frac{q_z(\boldsymbol{z})q_\theta(\boldsymbol{\theta})}{p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})}-\lambda\right]d\boldsymbol{\theta}d\boldsymbol{z} \tag{23.27}$$

が得られる．これより，

$$\log q_z(\boldsymbol{z})+D_{KL}\left[q_\theta(\boldsymbol{\theta}):p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})\right]=\lambda, \tag{23.28}$$

したがって，

$$q_z(\boldsymbol{z})=\exp(\lambda)\exp\left\{-D_{KL}\left[q_\theta(\boldsymbol{\theta}):p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})\right]\right\} \tag{23.29}$$

が得られる．ここで $\exp(\lambda)$ は定数であるから，これを c_z とすればよい．また，指数の中の D_{KL} は $p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})$ を $\boldsymbol{z}$ を固定して $\boldsymbol{\theta}$ のみの分布と考えたときの KL ダイバージェンスである．$q_\theta(\boldsymbol{\theta})$ についても全く同様である．

e 射影を実行して $q_z(\boldsymbol{z}),q_\theta(\boldsymbol{\theta})$ を得るのに，(23.23), (23.24) からわかるよ

うに，ダイバージェンスを計算するときに真の事後分布 $p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta}|D)$ の対数尤度の期待値を，それぞれもう一つの独立な分布 $q_p(\boldsymbol{\theta}), q_z(\boldsymbol{z})$ について取らなければならない．これは (23.23), (23.24) からわかるように $q_z(\boldsymbol{z})$ と $q_\theta(\boldsymbol{\theta})$ についての連立の形をしている．したがって，初めに一つ，例えば $q_\theta(\boldsymbol{\theta})$ を仮定して $p(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})$ の対数尤度の期待値を取り，これをもとにもう一つの分布 $q_z(\boldsymbol{z})$ を求め，次にこれを用いて対数尤度の期待値を取り，新しい $q_\theta(\boldsymbol{\theta})$ を求め，これを繰り返す手法が必要になる．とくに，隠れ変数が多数のブロックに分解されているときは，一つのブロックの事後確率を求めるのに，他のすべて分布の現在の値を用いてこれらの変数について期待値を取り，次にもう一つのブロックに移り，これを繰り返して，収束先を求める．

23.4 Bayes 統計の情報幾何再考

Bayes 統計では，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と変数 $\boldsymbol{x}$ の両方を確率変数と考える．したがって，その幾何学は同時確率分布 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$ のなす空間の幾何学である．これまでの情報幾何を素直に用いれば，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\theta}$ の直積空間に計量や接続を導入できる．そうした試みもいくつかあるが，特に目覚ましい成果を生み出すことはなかった．Bayes 統計の情報幾何を考察し，ここから新しい構造を生み出すことは，これからの興味ある研究課題である．

簡単のため，$\boldsymbol{x}$ が指数型分布族に従うモデルを考える．

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x} - \bar{\psi}(\boldsymbol{\theta}) - k(\boldsymbol{x})\right\} \tag{23.30}$$

と書ける．$k(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の空間の測度 $\mu(\boldsymbol{x})$ をこの形に書いたもので，$d\mu(\boldsymbol{x}) = \exp\{-k(\boldsymbol{x})\}\,d\boldsymbol{x}$ である．ここで，$\boldsymbol{\theta}$ の事前確率分布を $\pi(\boldsymbol{\theta})$ とすれば，両者の同時確率分布は

$$p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = \exp\{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{x} - \psi(\boldsymbol{\theta}) - k(\boldsymbol{x})\}, \quad \psi(\boldsymbol{\theta}) = \bar{\psi}(\boldsymbol{\theta}) - \log\pi(\boldsymbol{\theta}) \tag{23.31}$$

の形に書ける．$\boldsymbol{\theta}$ を固定した $\boldsymbol{x}$ の確率分布，すなわち (23.30) 式の条件付き確率分布 $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ の全体がモデルの分布族で，指数型分布族である．

一方，データ $\boldsymbol{x}$ を観測した後の $\boldsymbol{\theta}$ の事後確率分布は新しい $\bar{k}(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$p(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) = \exp\left\{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\theta} - \psi(\boldsymbol{\theta}) - \bar{k}(\boldsymbol{x})\right\} \tag{23.32}$$

となるから，これもまた指数型分布族である．これらは，$\boldsymbol{x}$ の分布空間と $\boldsymbol{\theta}$ の分布空間を双対につなぎ，互いに条件付きにすることで，一方から他方に移る．

一般の場合として，$\boldsymbol{\theta}$ が次元の低いパラメータ $\boldsymbol{u}$ により決まる曲指数型分布族 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u})$ を考えれば，パラメータの空間が制約を受け，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ の次元が異なる．このような仕組みが，例えば脳における推論で使われている可能性がある．すなわち，視覚系を例にとるならば，外界から情報が視覚野に入りニューロンを活性化するとき，脳の活性状態（各ニューロンの活動度 $\boldsymbol{x}$ の分布）は，外界のパラメータ $\boldsymbol{u}$ で指定される．一方，脳における情報処理は，事後分布

$p(\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{u})|\boldsymbol{x})$ を求めることと考えよう．この事後分布に基づいて，推論や行動の決定を行う．これが高次の領野の役割である．しかし，高次領野の情報は視覚野にフィードバックされ，データ $\boldsymbol{x}$ の補完や修正などに使われ，そこでも脳のダイナミックスによる推論が行われる．このようなプロセスを，Bayes 推論の枠組みで 2 つの共役な空間を用いて議論することができるように思う．

Bayes 推論は自然な枠組みである．しかし，過去に不幸な歴史があり，それが今に時々影を落とす．一つは哲学的な議論であった．確率事象において，パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ が始めに決まっていて，それに基づいてデータ $\boldsymbol{x}$ が発生すると考える．事後確率はこれをひっくり返して，データ $\boldsymbol{x}$ が観測されたときに原因にさかのぼってパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の確率を論ずる．

これに対して，因果律を厳格に考える一派から異議が出された．原因 $\boldsymbol{\theta}$ が一つ決まり，確率的にせよその結果として $\boldsymbol{x}$ が決まるとしよう．このとき，$\boldsymbol{x}$ を観測したからと言って，その結果パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ が決まるわけではない．それはもう決まっている（我々が知ろうと知るまいと）．だから，決まっていることに対して，因果を無視して確率を議論するなど，不当なことである．こうして，ひところ事後確率を求める Bayes の公式は不当なものとみなされ，姿を消した．これが復権するには年月を要した．

これに加えて，Bayes 推論では，事前分布を恣意的に選べば，どのような結論も導き出せるという問題がある．これを解決するのに，不変な事前分布として，Fisher 計量行列の行列式の平方根 $\sqrt{|G|}$ を使う方法が提案された．これを Jeffreys の事前分布というが，そこにも問題が指摘された．さらに，Bayes 推論をするのに，条件付き確率を計算するためには周辺分布を求めなければならない．これが昔のコンピュータでは計算できなかった．今では，強力なコンピュータのおかげで MCMC などの手法がいくらでも使える．多くの問題で数値計算が可能になったのである．

こうした影が垣間見えるとはいえ，いまは Bayes 推論は計算可能であり，しかもうまく使えば大変有用な手法として定着している．特にパラメータを確率変数とみなすことで，問題を単純化することができる．脳の情報処理は Bayes 推論を行っているのではないかという議論もある．たしかに，事前分布などは長年の経験で学習されて脳に蓄えられ，これが有効に使われていると見ることができる．いまや，Bayes 推論全盛の時代である．しかし，Bayes 推論は新しい手法というわけではない．昔からあったものが，不当な解釈にとらわれることなく有効に使われる．事前分布も経験から得られると考えるだけでなく，データから推論する．すなわち，事前分布にパラメータを導入してこれをハイパーパラメータと呼び，これをデータから推定する手法が使われている．

終わりの一言

今回は，機械学習の最後として，隠れ変数（潜在変数）を持つ統計モデルについて，EM アルゴリズムと変分 Bayes 法の手法を述べた．どちらも，確率分

布の空間における e 射影と m 射影が主役をなす．今では当たり前の，e 射影と m 射影の繰り返しによる KL ダイバージェンスの交互最小化は，Csiszar と Tusnady が最初に提案した．しかし，これはメジャーの雑誌に載らなかった．Csiszar が言うには，統計の雑誌に投稿したが，EM アルゴリズムを繰返し法で解くなど，計算の手間が大変で意味がないと，採録されなかった．

今回は最後に Bayes 推論の歴史的ないきさつを述べた．かって，Bayes 推論とフレキュエンティスト（Bayes の立場を取らない統計学）の間で不幸な論争があったとはいえ，今さらこの 2 つを対立して考える必要はない．非 Bayes の立場で作り上げた，Fisher 情報量などの統計学の理論の枠組みは，Bayes の立場でもそのまま使える．両者を統合して考えればよい．

参考文献

1) A.P. Dempster, N.M. Laird and D.B. Rubin, Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *J. Royal Statistical Society, B*, **39**, 1–38, 1977.

2) I. Csiszar and G. Tusnady, Information geometry and alternating minimization procedure. In E.F. Dedewicz, *et. al.* (eds.), *Statistics and Decision*, 205–237, Oldenbourg Verlag, 1984.

3) S. Amari, K. Kurata and H. Nagaoka, Information Geometry of Boltzmann Machines, *IEEE Trans. on Neural Networks*, **vol.3**, **No.2**, pp.260–271, 1992.

4) W. Byrne, Alternating minimization and Boltzmann machine learning, *IEEE Trans. on Neural Networks*, **vol.3**, **No.4**, 612–620, 1992.

5) S. Amari, Information geometry of the EM and em algorithms for neural networks, *Neural Networks*, **Vol.8**, **No.9**, 1379–1408, 1995.

6) M.J. Wainwright and M.I. Jordan, Graphical models, exponential families, and variational inference, *Foundations and Trends in Machine Learning*, **1**, 1–305, 2008.

7) C.M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*, Springer, 2006.

8) A. Honkela, T. Raiko, M. Kuusela M. Tornio and J. Karhunen, Approximate Riemannian conjugate gradient learning for fixed-form variation Bayes, *J. Machine Learning Research*, **11**, 3235–3268, 2010.

9) N. Ueda, R. Nakano and Z. Ghahramani and J.E. Hinton, SMEM algorithm for mixture models, *Neural Computation*, **12**, 2109–2128, 2000.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

特　集（2013年8月号予告）

エネルギーを通して物理学を知る

古典物理から現代物理まで

本体952円

巻頭言	佐藤　勝彦
力学的エネルギー	佐野　雅己
量子力学におけるエネルギー	小形　正男
自由エネルギーと熱力学第二法則	田崎　晴明
生物とエネルギーの流れ	伏見　　譲
相対性理論とエネルギー	白水　徹也
素粒子物理とエネルギー	小林　　誠
ダークエネルギー	向山　信治
［コラム］	生出　勝宣

特　集（2013年6月号）

発展する統計力学

導き出される新たな世界像

本体952円

発展する統計力学	宮下　精二
メゾスコピック非平衡統計力学	小林　研介
量子統計力学と恒等式	桂　　法称
物性物理学と統計力学	加藤　雄介
宇宙の進化と非平衡過程	吉田　直紀
情報の統計力学	梅野　　健
統計力学と関数論とブラウン運動と	香取　眞理
量子純粋状態による統計力学の定式化	清水　　明 杉浦　　祥
［コラム］経済物理　経済現象を統計力学で解析する	羽田野直道
［コラム］統計力学の教育　学生からの質問	西森　秀稔
［コラム］統計力学の温故知新	鈴木　増雄
《数学的な感覚の探求》 第10回	小谷　元子
《連載》 科学と社会　その13	岡本　拓司
大学院入試問題からみた大学の数学　その6	海老原　円 太田　雅人

編集後記

様々な現象を解明するための手段や方法は多様にあるかと思います．今回の特集で取り上げた「群」は数学における重要テーマでありますが，物理においても重要なテーマであることが見て取れたのではないでしょうか．

私たちの日常の中にも今回の「群」と同じような様々な問題・課題を解決するための手段や方法はあると思いますが，手段や方法に頼りすぎるあまり，本来の目的である問題・課題の解決を忘れないようにしたいものです．（R）

＊　　＊

本特集では“群”というキーワードに基づいて，物理学の様々な分野の解説をしていただきました．

これまでは抽象的な考え方に対して目を背けがちでしたが，群のような抽象的概念であるからこそ持つことができる普遍性とその力を知ることができました．

今回の特集が読者の皆さんにとっても，物理学における様々な分野をこれまでと違う視点から見つめ，理解を深めるきっかけになればと思います．（T）

数　理　科　学　7月号

2013年7月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁